ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 14 | April 1934 | Heft 2

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Wurzelabzählung bei Stabilitätsfragen.

Von *K. Th. Vahlen* in Berlin.

Die Anzahl der reellen Wurzeln einer reellen Gleichung $f(x)=0$ in einem Intervall liefert uns der auf f und f' angewandte Euklidische Algorithmus zum Aufsuchen des größten Gemeinteilers. Dieses Sturmsche Verfahren wurde von Sylvester auf zwei Funktionen f und $f_1 \neq f'$ ausgedehnt, von Cayley und Hermite zur Theorie der Determinanten und quadratischen Formen in Beziehung gesetzt. Die Anzahl der komplexen Wurzeln in einem Flächenstück der Gaußschen Zahlenebene hat Cauchy auf eine Anzahl zurückgeführt, die sich auf den Rand bezieht. Der Grundgedanke findet sich schon in Gauß' 1. und 4. Fundamentalsatzbeweise. Die der Sylvesterschen entsprechende Verallgemeinerung auf 2 oder mehr Gleichungen mit 2 oder mehr Unbekannten hat Kronecker in seiner Charakteristiken-Theorie entwickelt. Aber es fehlt das Gegenstück zu dem durch seine Einfachheit ausgezeichneten klassischen Sturmschen Verfahren. Eine Anforderung der Praxis gab für einen Sonderfall dieser Art der Algebra eine anregende Problemstellung. Die charakteristische Gleichung, die z. B. bei mechanischen Schwingungen und bei elektrischen Ausgleichsvorgängen auftritt, darf nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen haben, damit der Vorgang stabil ist, d. h. damit die Veränderlichen mit wachsender Zeit nicht unbeschränkt wachsen. Stodola[1]) erbat und erhielt von Hurwitz ein Kriterium hierfür, das er beim Bau der Turbinen in Davos mit glänzendem Erfolge anwandte[2]). Aber Stodola findet das Kriterium, das die Berechnung einer Anzahl Determinanten höherer Ordnung erfordert, umständlich anwendbar. Überdies macht Hurwitz einen beträchtlichen Umweg und kommt zwar zu einem Kriterium dafür, daß alle Wurzeln in der linken Gaußschen Halbebene liegen, aber nicht, wie man wünschen muß, zu einer Abzählung der Wurzeln in dieser Halbebene[*]). Wir werden im folgenden unmittelbar an die Grundgedanken von Gauß, Sturm, Sylvester, Cauchy, Kronecker anknüpfend ein dem Sturmschen Verfahren nachgebildetes ableiten, das die Abzählung in einem zur imaginären Axe parallelen Streifen und insbesondere das Hurwitzsche Kriterium liefert. Dabei wird auch die tiefere Bedeutung der Hurwitzschen Determinanten zum Vorschein kommen. Der Gegenstand tritt damit in enge Beziehung zu meiner

[1]) Schweizerische Bauzeitung, Bd. 23, Nr. 17, 18.
[2]) Math. Ann., Bd. 46.
[*]) Auch Schur (diese Ztschr. 1, 1921, S. 307) behandelt nur den Hurwitzschen Sonderfall.

Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Funktionen[3]), die eigentlich alles Wesentliche schon enthielt.

I. Es seien $f_0, f_1, f_2, \ldots$ reelle stetige Veränderliche, die von einem bestimmten Index ab zeichenfest seien. Die Veränderlichkeit sei ferner durch die Sylvestersche Forderung eingeschränkt: Wenn eine der Veränderlichen $f_1, f_2, \ldots$ durch 0 geht, haben die vorhergehende und die nachfolgende entgegengesetztes Zeichen; dabei ist ± 0 mit dem geeigneten Zeichen zu wählen. Dann ändert sich die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $f_0, f_1, \ldots$ nicht, wenn ein $f_1, f_2, \ldots$, sondern nur, wenn f_0 und nicht zugleich f_1 durch 0 geht. Und zwar wird ein Wechsel verloren (gewonnen), wenn f_0 bei $\begin{matrix}\text{positivem}\\ \text{negativem}\end{matrix}$ f_1 $\begin{matrix}\text{wachsend (fallend)}\\ \text{fallend (wachsend)}\end{matrix}$ durch 0 hindurchgeht, und die Wechselanzahl bleibt unverändert, wenn mit f_0 zugleich f_1 durch 0 hindurchgeht. Die Wechselanzahl ändert sich also jedesmal um $\operatorname{sgn} f_1\, d f_0$. Demnach ist die Summe $S \operatorname{sgn} f_1\, d f_0$ erstreckt über die von f_0 passierten Nullstellen gleich dem Wechselverlust der Reihe $f_0, f_1, \ldots$ (Sylvester). Ist insbesondere immer $\operatorname{sgn} f_1 = \operatorname{sgn} d f_0$ also $\operatorname{sgn} f_1\, d f_0 = +1$, so ist der Wechselverlust gleich der Anzahl der durchlaufenen Nullstellen von f_0 (Sturm).

Bei der Anwendung von Determinanten wird ein Ausdruck von der Form $g_h f_h - f_{h-1} f_{h+1}$ positiv und hierdurch die Sylvestersche Forderung erfüllt. Dasselbe bewirkt eine Kette von Gleichungen $f_{h-1} - g_h f_h + f_{h+1} = 0$, wie man sie z. B.[4]) durch den Euklidischen Algorithmus erhält, angewandt auf 2 ganze rationale Funktionen f_0, f_1 einer Veränderlichen. Hier ist g_h der Quotient, $-f_{h+1}$ der Rest bei der Division von f_{h-1} durch f_h.

II. Es seien $u(x, y)$, $v(x, y)$ reelle, eindeutige, stetige Funktionen der reellen Veränderlichen x, y. Die x-y-Ebene wird in Teile zerlegt, wo $\left.\begin{matrix}u\\ v\end{matrix}\right\}$ positiv bzw. negativ ist, die getrennt seien durch die Kurve $\begin{cases}u(x, y) = 0\\ v(x, y) = 0\end{cases}$. Ein Schnittpunkt von $u = 0$, $v = 0$ ist von einer der beiden Arten:

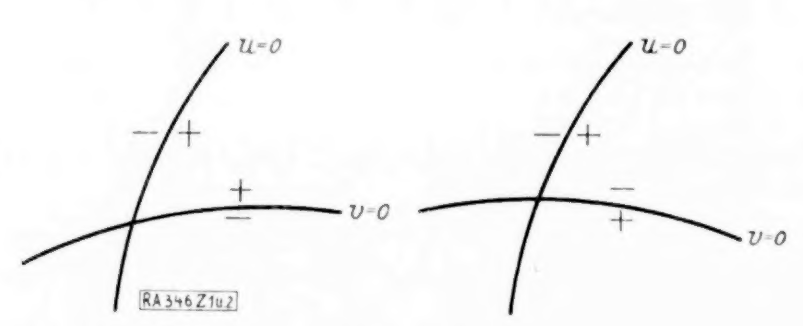


Abb. 1 und 2.

denen das Zeichen + bzw. − beigelegt werde. Die Summen $S \operatorname{sgn} v\, d u$ und $S \operatorname{sgn} u\, d v$, erstreckt über eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve C, das Innere links, die erstere über die Nullstellen von u, die zweite über die Nullstellen von v, sind entgegengesetzt gleich, ihre Summe $S \operatorname{sgn} d\, u v$, erstreckt über alle Nullstellen von $u v$ auf C, ist gleich 0. Denn die Kurve C tritt ebensooft in das Gebiet, wo $u v$ negativ ist, ein wie aus ihm heraus.

Die Summe $-\frac{1}{2} S \operatorname{sgn} v\, d u$ ist gleich der algebraischen Anzahl der im Inneren von C liegenden Schnittpunkte von u und v (Cauchy).

Die Richtigkeit dieses Satzes ist offenbar, wenn C einen oder keinen Schnittpunkt umschließt. Daraus folgt er allgemein, indem man das Gebiet in Teile zerlegt und den Satz auf jeden Teil anwendet. Die Summationen über innere Ränder werden dabei in beiden Richtungen erstreckt, heben sich also auf.

Sei jetzt insbesondere $u + i v$ eine ganze rationale Funktion $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots$ der komplexen Veränderlichen $z = x + i y$, und habe nur einfache Nullstellen. In der Nähe einer Nullstelle $z_0 = x_0 + i y_0$ der Gleichung $f(z) = 0$ wird diese Gleichung bis auf Glieder höherer Ordnung in $z - z_0$ von der Form $(a + i b)(z - z_0) = 0$, so daß man nahezu $u = a(x - x_0) - b(y - y_0)$ und $v = a(y - y_0) + b(x - x_0)$ hat. Der Schnitt x_0, y_0 von u und v ist also wie der der beiden Graden $a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0$, $a(y - y_0) + b(x - x_0) = 0$ von der ersten Art. Also ist in diesem Fall $-\frac{1}{2} S \operatorname{sgn} v\, d u$ gleich der Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ im Inneren von C.

Auf einem hinreichend großen Kreise $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ werden u und v nahezu gleich $r^n \cos n t$, $r^n \sin n t$. Also hat u auf ihm $2n$ Nullstellen, nahe bei $t = \frac{h}{n}$ Rechte für

[3]) Acta mathematica, Bd. 23 (1899) „Die Aufgabe . . ist von Stern und mit besserem Erfolge von O. Heilermann behandelt worden" (Enc. d. math. Wiss. I 1, S. 138).

[4]) Man kann auch die Faktoren g_h willkürlich wählen und mit einer Funktion f_n abbrechen, die in einem gegebenen Intervall zeichenfest ist. Das ist auch bei transzendenten Funktionen f_0, f_1 anwendbar.

$h = \pm 1, \pm 3, .., \pm(2n-1)$, ebenso v bei $h = 0, \pm 2, \pm 4, .., \pm(2n-2), 2n$. Die Summe $-S \operatorname{sgn} v\,du$ besteht wegen $d\cos t = -\sin t\,dt$ aus $2n$ Einheiten, die Hälfte davon gibt die Anzahl n der Wurzeln im Inneren (Gauß).

III. Von den $2n$ Nullstellen von $\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$ liegen bei $\begin{matrix} \text{gradem} \\ \text{ungradem} \end{matrix}$ n die n zu

$$h = \begin{cases} \pm 1, \pm 3, .., \pm(n-1) \\ \;\;0, \pm 2, .., \pm(n-1) \end{cases} \text{gehörenden auf dem rechten Halbkreise, die } n \text{ zu}$$

$$h = \begin{cases} \pm(n+1), .., \pm(2n-1) \\ \pm(n+1), .., \quad 2n \end{cases} \text{gehörenden auf dem linken Halbkreise.}$$

Sei jetzt

$f_0(y) = y^n - a_2 y^{n-2} + a_4 y^{n-4} - .., f_1(y) = a_1 y^{n-1} - a_3 y^{n-3} + a_5 y^{n-5} - ..$, also $f(iy) = i^n [f_0(y) - i f_1(y)]$. Demnach für

$$n \begin{cases} \text{grade} & u(0,y) = i^n f_0(y), & v(0,y) = -i^n f_1(y), & -\operatorname{sgn} v\,du = \operatorname{sgn} f_1\,df_0, \\ \text{ungrade} & u(0,y) = i^{n-1} f_1(y), & v(0,y) = i^{n-1} f_0(y), & \operatorname{sgn} u\,dv = \operatorname{sgn} f_1\,df_0. \end{cases}$$

Wir setzen $S \operatorname{sgn} f_1\,df_0 = m$, die Summe erstreckt über den auf der y-Achse liegenden Durchmesser des großen Kreises, also von dem großen negativen Werte $y = -r$ bis zu dem großen positiven Werte $y = +r$.

Bei $\begin{Bmatrix} \text{gradem} \\ \text{ungradem} \end{Bmatrix}$ n gibt die Summe $\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} S \operatorname{sgn} v\,du \\ \frac{1}{2} S \operatorname{sgn} u\,dv \end{Bmatrix}$ über den Rand des linken Halbkreises $\frac{1}{2}(n+m)$ als Anzahl der Wurzeln innerhalb des linken Halbkreises. Ebenso wird $\frac{1}{2}(n-m)$ die Anzahl der Wurzeln innerhalb des rechten Halbkreises. Zur Ermittlung von m machen wir die Kettenbruchentwicklung:

$$f_{h-1} - g_h f_h + f_{h+1} = 0 \qquad (h = 1, 2, 3, ..).$$

Im regulären Fall nehmen die Grade der Funktionen immer um eine Einheit ab, es wird $g_h = q_h y$ und das höchste Glied von f_h sei $\ddot{a}_h y^{n-h}$. Dann ist $m = S \operatorname{sgn} f_1\,df_0 =$ dem Wechselverlust in $f_0, f_1, .., f_n$ beim Übergang von $y = -r$ bis zu $y = +r$. Also gleich der Wechselzahl in $\ddot{a}_0, -\ddot{a}_1, \ddot{a}_2, -\ddot{a}_3, .., (-1)^n \ddot{a}_n$, vermindert um die Wechselzahl von $\ddot{a}_0, \ddot{a}_1, \ddot{a}_2, .., \ddot{a}_n$. Bezeichnet man die letztere mit W, die erstere, die gleich der Folgenzahl von $\ddot{a}_0, \ddot{a}_1, .., \ddot{a}_n$ ist, mit F, so ist also

$$m = F - W.$$

Dies mit $\qquad n = F + W$ zusammen gibt

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{2}(n+m) = F \\ \frac{1}{2}(n-m) = W \end{matrix}\right\} \text{ als Anzahl der Wurzeln in der } \begin{Bmatrix} \text{linken} \\ \text{rechten} \end{Bmatrix} \text{ Halbebene.}$$

Im Hurwitzschen Falle sind alle Wurzeln in der linken Halbebene, also ist $F = n$, d. h., da $\ddot{a}_0 = 1$ ist, es müssen alle $\ddot{a}_h$ positiv sein.

Im irregulären Fall bricht die Kettenbruchentwicklung eher ab, f_0 und f_1 haben einen Gemeinteiler, den man sich aus allen f_h fortgehoben denken kann. Dann geben F und W die Anzahlen der Wurzeln in der linken und rechten Halbebene, und es sind noch $n - F - W$ Wurzeln des Gemeinteilers vorhanden, rein imaginäre Wurzeln von f, innerhalb keiner der beiden Halbebenen, sondern auf der sie trennenden y-Achse gelegen.

Wendet man den Kettenbruchalgorithmus statt auf $f(z)$ an auf $f(z-\gamma)$, so werden die höchsten Koeffizienten $\ddot{a}_h$ Funktionen von γ, bezeichnet mit $\ddot{a}_h(\gamma)$. Ist nun $F\gamma$ die Anzahl der Folgen in der Reihe der $\ddot{a}_h(\gamma)$, so ist $F\gamma$ die Anzahl der Wurzeln links von der Graden $x = \gamma$ und $F_\alpha - F\beta$ die Anzahl der Wurzeln in dem zur y-Achse parallelen Streifen zwischen den Graden $x = \alpha$ und $x = \beta$. Man kann dann γ so bestimmen, daß alle Wurzeln von $f(z-\gamma) = 0$ negative Realteile haben. Bei mechanischen oder elektrischen Schwingungsvorgängen bedeutet das die Einführung eines Dämpfungsfaktors $e^{-\gamma t}$, durch den der Vorgang stabil wird.

IV. Mit $G_n(a_1, a_2, .., a_n)$ sei die Geminante von $f(z)$ bezeichnet, d. h. das Produkt aller binären Wurzelsummen $z_h + z_k\,(h < k)$. Sie ist eine ganze homogene symmetrische Funktion der z_k von der Ordnung $\binom{n}{2}$, also isobar in den a_h vom Gewicht $\binom{n}{2}$. Wir geben ihr das Vorzeichen $(-1)^{\binom{n}{2}}$. Die Geminante wird 0, wenn und nur wenn zwei Wurzeln entgegen-

gesetzt gleich sind, also $f(z)$ und $f(-z)$, oder also $z^n + a_2 z^{n-2} + a_4 z^{n-4} + ..$ und $a_1 z^{n-1} + a_3 z^{n-3} + a_5 z^{n-5} + ..$ einen Gemeinteiler haben, also wenn und nur wenn die Resultante verschwindet ($a_0 = 1$):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 & & \\ & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 & & \\ & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \vdots & & \\ & & & & & a_n & & \\ & & & & & a_{n-1} & & \end{vmatrix}$$

Diese Resultante stimmt mit der Geminante G_n genau überein. Wir weisen zunächst nach, daß die Resultante isobar vom Gewichte $\binom{n}{2}$ ist. In der etwas allgemeineren Determinante $|a_{i+2k}|$, wo der Zeilenindex i die Werte $1, 0, -1, -2, .., -h+3$, der Spaltenindex k die Werte $0, 1, 2, .. h-2$ durchlaufen möge, hat jedes Glied eine Indexsumme gleich $\binom{h}{2}$. Setzt man jedes Element a_{i+2k} gleich 0, wenn der Index kleiner als 0 oder größer als n ist, so erhält man die „Subgeminante" $G_h(a_1, .., a_n)$, insbesondere für $h = n$ die obige Resultante, die also isobar mit G_n ist, also mit G_n bis auf einen Zahlenfaktor übereinstimmt. Dieser ist gleich Eins für $G_2 = -(z_1 + z_2) = a_1$, $G_3 = -(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3) = a_1 a_2 - a_3$, und deshalb durch den Schluß von $n-1$ auf n allgemein. Denn für $z_n = 0, a_n = 0$ wird die Resultante, entwickelt nach der letzten Spalte, gleich $a_{n-1} G_{n-1}(a_1, a_2, .., a_{n-1})$, und ebenso die Geminante

$$G_n = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i, k = 1, \dots, n-1} (z_i + z_k) \cdot z_1 z_2 .. z_{n-1} = (-1)^{\binom{n}{2}} (-1)^{\binom{n-1}{2}} G_{n-1}(a_1, a_2, .., a_{n-1}) \cdot (-1)^{n-1} a_{n-1}$$
$$= a_{n-1} G_{n-1}(a_1, .., a_{n-1}).$$

Die Geminante $G_n(a_1, .., a_n)$ ist irreduktibel, denn kein Teilprodukt von ihr ist eine symmetrische Funktion der z_h. Aber auch jede Subgeminante $G_h(a_1, .., a_n)$ ist irreduktibel, da sie es für $a_{h+1} = a_{h+2} = .. = a_n = 0$ ist. Denn dann geht sie in die irreduktible Geminante $G_h(a_1, .., a_h)$ über.

V. Ersetzt man in der Determinante für G_{k+1} die Elemente der letzten Spalte durch $y^{k-1} f_1, y^{k-2} f_0, y^{k-3} f_1, ..$ und entwickelt nach dieser, so erhält man $P_{k-1} f_1 + Q_{k-2} f_0$, wo die Grade der ganzen Funktionen P und Q durch ihre Indizes angegeben werden. Zweitens multiplizieren wir die ersten $k-1$ Spalten der Reihe nach mit $y^{n+k-2}, y^{n+k-4}, .., y^{n-k+2}$ und fügen sie mit wechselnden Zeichen zur letzten hinzu, so besteht diese nunmehr aus einer Anzahl von Elementen 0 und aus den $n-k+1$ Elementen:

$$a_n y^{n-k},\ a_{n-1} y^{n-k},\ a_{n-2} y^{n-k} - a_n y^{n-k-2},\ a_{n-3} y^{n-k} - a_{n-1} y^{n-k-2},$$
$$a_{n-4} y^{n-k} - a_{n-2} y^{n-k-2} + a_n y^{n-k-4}, .., a_k y^{n-k} - \dots$$

Diese Determinante gibt also, entwickelt nach der letzten Spalte, eine ganze Funktion $(n-k)$-ten Grades von y beginnend mit $G_{k+1} y^{n-k} - ..$ Dies ist also der Gemeinteiler $(n-k)$-ten Grades von f_0 und f_1, wenn ein solcher und keiner höheren Grades vorhanden ist. Es ist dann G_{k+1} die letzte nicht verschwindende der Subgeminanten; von G_{k+2} ab sind alle gleich 0.

Der durch den Kettenbruchalgorithmus $f_{k-1} - g_k f_k + f_{k+1} = 0$ gelieferte Gemeinteiler f_k vom Grade $n-k$ in y ist keine ganze Funktion der a. Er muß sich also von dem oben als Determinante dargestellten durch einen Faktor unterscheiden, dessen Zähler eine bloße Potenz von G_{k+1} ist, da f_k nur mit G_{k+1} zugleich verschwinden kann. Sei dieser Faktor gleich G_{k+1}^r / J_k. Da die f_k zufolge ihrer Entstehung alle vom gleichen Gewichte n in y und den a sind, also der höchste Koeffizient $\ddot{a}_k$ von f_k vom Gewichte k in den a ist, so muß der Faktor G_{k+1}^r / J_k vom Gewichte $-\binom{k}{2}$ sein. Wir werden zeigen, daß $r = 0$ und $J_k = G_k$ ist, also $\ddot{a}_k = G_{k+1} / G_k$ und $g_k = y\, \ddot{a}_{k-1} / \ddot{a}_k = y\, G_k^2 / G_{k-1} G_{k+1}$ ist. Für $k = 1$ und $k = 2$ trifft es offenbar zu, wobei noch $G_1 = 1$ zu setzen ist. Sei es bis zum Index $k-1$ bewiesen. Dann folgt aus der Gleichung

$$G_{k-2} G_k f_{k-2} - G_{k-1}^2 y f_{k-1} + G_{k-2} G_k f_k = 0,$$

daß auch ihr letztes Glied, also auch der höchste Koeffizient darin $G_{k-2}\, G_k\, G_{k+1}^{r+1} / J_k$ eine ganze Funktion sein muß, daß also $G_{k-2}\, G_k$ durch J_k vom Gewichte $\binom{k}{2} + r\binom{k+1}{2}$ teilbar sein muß. Das ist wegen der Größe des Gewichtes nur für $r=0$ und wegen der Irreduktibilität der Geminanten nur für $J_k = G_k$ möglich, abgesehen von einem Zahlenfaktor, den wir aus einer speziellen Annahme für f_0 und f_1 ermitteln werden.

Es ist bisher bewiesen, daß $\ddot{a}_k = \frac{G_{k+1}}{G_k} c_k$ ist, und es soll bewiesen werden, daß der Zahlenfaktor $c_k = 1$ ist. Nehmen wir $a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_n = 0$, so wird $G_{k+1} = G_k\, a_k$ und es wird $\ddot{a}_k = a_k$ die zu beweisende Gleichung.

Bei $\begin{matrix}\text{gradem}\\ \text{ungradem}\end{matrix}$ k ist $\begin{matrix}(-1)^{\frac{k}{2}}\\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}\end{matrix}$ das letzte Glied von $\begin{matrix}f_0 = y^k - a_2\, y^{k-2} + \ldots\\ f_1 = a_1\, y^{k-1} - a_3\, y^{k-3} + \ldots\end{matrix}$.

Wir nehmen nun $f_h(y) = \cos\,(k-h)\,t$ und $2\cos t = y$. Dann besteht der Algorithmus $f_{h-1} - y\, f_h + f_{h+1} = 0\; (h = 1, \ldots, k-1)$ und es ist $f_k = 1$ also auch $\ddot{a}_k = 1$. Andererseits ist das letzte Glied von $\cos 2\,h\,t$ gleich $(-1)^h$, wie vermittelst $\cos 2\,h\,t = 2\cos^2 h\,t - 1$ zu beweisen ist. Daher ist bei $\begin{matrix}\text{gradem}\\ \text{ungradem}\end{matrix}$ k das letzte Glied von $\begin{matrix}f_0\\ f_1\end{matrix}$ gleich $\begin{matrix}(-1)^{\frac{1}{2}k}\\ (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}\end{matrix}$. Also ist auch $a_k = 1$. Also $a_k = \ddot{a}_k$, also $c_k = 1$. was zu beweisen war.

Unser Hauptergebnis von III. können wir nunmehr so aussprechen:

Die Anzahl der Wurzeln in der $\begin{matrix}\text{linken}\\ \text{rechten}\end{matrix}$ Halbebene ist gleich der Anzahl $\begin{matrix}\text{Folgen}\\ \text{Wechsel}\end{matrix}$ in der Reihe der Geminanten-Quotienten $\frac{G_{h+1}}{G_h}\; (h = 0, 1, \ldots, n)$, wobei noch $G_0 = 1$ zu nehmen ist. Verschwinden die letzten $n - n'$ Glieder der Reihe, so sind $n - n'$ rein imaginäre Wurzeln vorhanden.

VI. Nicht immer wird die Anwendung dieses Satzes zweckmäßig oder überhaupt möglich sein. Statt des Kettenbruchverfahrens können die Determinanten in den Vordergrund treten. Auch dann bleibt die in I. erwähnte Sylvestersche Forderung grundlegend. Ein auch praktisch wichtiger Fall wird im folgenden behandelt.

Für die Determinante n-ter Ordnung $|d_{h\,k}| = D_n \quad (h, k = 1, \ldots, n)$ gibt der Adjunktensatz, angewandt auf die letzte Subdeterminante 2ter Ordnung, bekanntlich die Formel

$$D_{n-2}\, D_n = D_{n-1} \operatorname{adj} d_{n-1,\, n-1} - \operatorname{adj} d_{n-1,\, n} \operatorname{adj} d_{n,\, n-1}.$$

Für $n = 2$ ergibt sich, daß man $D_0 = 1$ setzen muß, damit die Formel gültig bleibt. Es bestehe nun Symmetrie $d_{h\,k} = d_{k\,h}$ oder auch in dem allgemeineren Hermiteschen Sinne $d_{h\,k}$ konjugiert komplex $d_{k\,h}$, $d_{h\,h}$ reell. Dann gilt dasselbe für die Adjunkten. Infolgedessen liefert die obige Adjunktenformel die Sylvestersche Grundeigenschaft für die Reihe der Hauptsubdeterminanten $D_0, D_1, \ldots, D_n$, nämlich:

Wenn $D_{h-1} = 0$ ist, haben D_h und D_{h-2} entgegengesetztes Zeichen. Sollte eine von diesen gleich 0 sein, so lege man ihr das der anderen entgegengesetzte Zeichen bei.

Wir setzen jetzt für die Elemente $d_{h\,k}$ lineare Funktionen $a_{h\,k} + z\, c_{h\,k}$ und bezeichnen mit A_h und $C_h\; (h = 0, 1, \ldots, n)$ die Hauptsubdeterminanten der Systeme $a_{h\,k}$ und $c_{h\,k}$. Dann ist nach dem Sylvesterschen Satze:

die Summe $\quad \mathop{S}\limits_{z=0}^{z=\infty} \operatorname{sgn} D_{n-1}(z)\, d\, D_n(z) = W(1, A_1, \ldots, A_n) - W(1, C_1, \ldots, C_n)$

und die Summe

$$\mathop{S}\limits_{z=-\infty}^{z=0} \operatorname{sgn} D_{n-1}(z)\, d\, D_n(z) = W(1, -C_1, C_2, -C_3, \ldots, (-1)^n C_n) - W(1, A_1, \ldots, A_n)$$
$$= F(1, C_1, C_2, \ldots, C_n) - W(1, A_1, \ldots, A_n) = F(1, A_1, \ldots, A_n) - W(1, C_1, \ldots, C_n).$$

Wir wollen diese Gleichungen kurz schreiben:

$$\mathop{S}\limits_{z=0}^{z=\infty} = W_A - W_C \quad \text{und} \quad \mathop{S}\limits_{z=-\infty}^{z=0} = F_C - W_A = F_A - W_C.$$

Die Summe beider Gleichungen gibt

$$\mathop{S}\limits_{z=-\infty}^{z=\infty} = W_A + F_A - 2\,W_C = F_C - W_C.$$

Die Summe links ist um eine grade Zahl (einschließlich 0) kleiner als die Anzahl der reellen Wurzeln, also W_C nicht kleiner als die Anzahl der komplexen Paare. Für $W_C = 0$ ist kein komplexes Paar vorhanden, die Gleichung $D_n(z) = 0$ hat n verschiedene reelle Wurzeln, und diese werden von den $n-1$ reellen Wurzeln der Gleichung $D_{n-1}(z) = 0$ getrennt, da diese Funktion an den Nullstellen von $D_n(z)$ das Vorzeichen von $d\,D_n(z)$ hat, also abwechselnd positiv und negativ ist. Natürlich hat auch die reziproke Gleichung $|a_{hk}\,t + c_{hk}| = 0$ nur reelle Wurzeln, wie weiter unten benutzt wird.

Da nun die sgn $D_{n-1}(z)\,d\,D_n(z)$ alle $= +1$ sind, sind W_A und F_A die Anzahlen der positiven und der negativen Wurzeln der Gleichung $D_n(z) = 0$; und $W_A - F_A$ gleich der Differenz dieser Anzahlen gilt auch für $W_C > 0$. Sind nunmehr auch alle $A_h > 0$, also außer $W_C = 0$ auch noch $W_A = 0$, so ergibt sich, daß nur negative Wurzeln vorhanden sind.

Infolgedessen hat eine Gleichung $|a_{hk} + z^2 c_{hk}| = 0$ nur rein imaginäre Wurzeln. Von dieser Form ist z. B. die charakteristische Gleichung beim Problem der kleinen oder der elastischen Schwingungen mechanischer Systeme von n Freiheitsgraden, wobei $\frac{1}{2} S\, a_{hk}\, q_h\, q_k$ die potentielle, $\frac{1}{2} S\, c_{hk}\, p_h\, p_k$ die kinetische Energie, q_h und p_h die Lagrangeschen Koordinaten und ihre Ableitungen nach der Zeit sind.

Wirken aber Widerstände (Reibung, Dämpfung) und verborgene Bewegungen mit, so wird die charakteristische Gleichung von der Form $|a_{hk} + z\, b_{hk} + z^2 c_{hk}| = 0$, wobei die b_{hk} die Symmetrie-Eigenschaft nur haben, wenn verborgene Bewegungen nicht mitwirken. Für diesen Fall ist $\frac{1}{2} S\, b_{hk}\, p_h\, p_k$, die verlorene Energie, eine positive Form. Es soll gezeigt werden, daß die Gleichung dann nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen hat.

Man kann bekanntlich die beiden quadratischen Formen der q und der p durch Einführung von Hauptkoordinaten simultan auf Quadratsummen transformieren. Dabei gehe das System a_{hk} über in das Einheitssystem δ_{hk}, und das System c_{hk} in das Hauptsystem $\delta_{hk}\, c_h$. Das Kroneckersche Symbol δ_{hk} verschwindet bei ungleichen Indizes und ist sonst gleich Eins. Die charakteristische Gleichung nimmt, wenn man alle Spalten durch z teilt, die Form an $|b_{hk} + \delta_{hk}(z^{-1} + c_h\, z)| = 0$.

Ist z eine Wurzel mit positivem Realteil, so ist auch der Realteil von $z^{-1} + c_h z$ positiv. Setzen wir $z^{-1} + c_h\, z = d_h + i\, e_h$, so sind auch alle Hauptsubdeterminanten des Systems $b_{hk} + \delta_{hk}\, d_h$ positiv. Denn entwickelt man eine derselben nach den Produkten der in der Diagonale stehenden d_h, so ist der Koeffizient jedes solchen Produktes eine Hauptsubdeterminante des Systems b_{hk}, also positiv. Die Gleichung $|(b_{hk} + \delta_{hk}\, d_h) + \delta_{hk}\, e_h\, t| = 0$ für t erfüllt also die Voraussetzungen des obigen Satzes, demzufolge eine solche Gleichung nur reelle Wurzeln, also nicht die Wurzel i haben kann.

Wirken dagegen verborgene Bewegungen, oder im Fall eines elektrischen Stromnetzes unbekannte Quellen (Senken), besteht also die Symmetrie-Eigenschaft $b_{hk} = b_{kh}$ nicht, so ist zunächst folgendes klar. Man zerlegt die Matrix b_{hk} in eine symmetrische $\frac{1}{2}(b_{hk} + b_{kh})$ und eine schiefsymmetrische $\frac{1}{2}(b_{hk} - b_{kh})$. Die erstere rührt von den Widerständen her, die letztere von den verborgenen Bewegungen. Sind diese sog. „gyroskopischen" Glieder klein, so wird der Charakter der Wurzeln nicht geändert werden, sie werden nach wie vor nur negative Realteile haben. Daß aber ein Wachsen der gyroskopischen Glieder über gewisse Grenzen diesen Sachverhalt ändert, also einen stabilen in einen instabilen Vorgang verwandelt, das nachzuweisen genügt es, ein Beispiel zu betrachten. Es sei $n = 2$ und die Gleichung

$$\begin{vmatrix} f_{11}(z), & f_{12}(z) + b \\ f_{21}(z) - b, & f_{22}(z) \end{vmatrix} = 0$$

entwickelt $a_0 z^4 + a_1 z^3 + (a_2 - b^2) z^2 + a_3 z + a_4 = 0$ habe für $b = 0$ die verlangte Symmetrie-Eigenschaft, erfülle also die Hurwitzschen Bedingungen. Nach Hinzukommen von b sind diese Bedingungen nur noch erfüllt, wenn

$$a_2 - b^2 > 0$$

$$a_1(a_2 - b^2) - a_0 a_3 > 0$$

$$a_1(a_2 - b^2)\, a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$$

ist. Diese Bedingungen erfordern nur die eine

$$b^2 < a_2 - \frac{a_0 a_3}{a_1} - \frac{a_1 a_4}{a_3}.$$

Überschreitet b^2 diese Schranke, so wird der Vorgang instabil. 346

Application of the Hertz's Theory of Impact to the Longitudinal Vibration of a Bar excited by the Impact of an Elastic Load.

By *M. Ghosh* in Calcutta.

Anwendung der Hertzschen Stoßtheorie auf die Longitudinalschwingungen eines Stabes, die durch den Stoß eines elastischen Stabes hervorgerufen werden.

Zusammenfassung. Die Theorie von Boussinesq über die Longitudinalschwingungen eines Stabes, der von einem harten Körper getroffen wird, wird auf den allgemeineren Fall eines elastischen Angriffs im Sinne der Hertzschen Stoßtheorie ausgedehnt. Es wird vorausgesetzt, daß zu Beginn und Ende der Berührung das Hertzsche Kompressionsgesetz, dazwischen das Hookesche Gesetz Geltung hat. Es ergibt sich, daß die Dauer des Vorgangs von der Geschwindigkeit des Stoßes wie von der Welle, die in dem Stabe hervorgerufen wird, abhängt. Dies erklärt das Fortschreiten des Druckes während der Berührung, wie es von Tschudi im Lichtbild festgestellt wurde.

The problem of collision of two bodies was more or less successfully treated by Hertz[1]) who proposed that the strain produced in each, by impact is the local statical effect, which is produced gradually, and subsides gradually. He found an expression of the duration of impact, which is inversely proportional to the fifth root of velocity of impact. But it is generally found that, when two bodies collide, each is thrown into a state of internal vibration, which however, Hertz did not take into account. Long before Hertz, Poisson[2]) treated the problem of the longitudinal vibration set up in two bars which impinge longitudinally, but he arrived at some paradoxical conclusions due to some unfortunate error that crept in his analysis. Next St. Venant[3]) discussed the general case of two rods, striking each other longitudinally, with the help of some arbitrary function, the method being known as 'the variation of integration constant'. Some minor improvement was made by Voigt[4]) and Hausmanninger[5]), and some few special cases, including the case of a longitudinal impact, of a hard massive load, upon one end of a rod, fixed at the other, were discussed on the same basis by Sebert-Hugoniot[6]) and Boussinesq[7]). Later on Sears[8]) further investigated the case as treated by St. Venant, both theoretically as well as experimentally. According to him, the contact is determined by Hertz's impact, and the state of the remaining portion of the bar is given by St. Venant's theory. The experiment of Wagstaff[9]) supports also Sears view point and his experimental values of the duration in the case of long rods are less than those derived from the Hertz's theory. Tschudi[10]) repeated the experiment of Sears, before Wagstaff, and drew conclusions that the duration of contact is given by Hertz's theory and is independent of the wave, produced in the rod. But his conclusions go against his photographic curves of the oscillogram, showing the fluctuating variation of the contact resistances of two copper bars. This fluctuation evidently proves the corresponding pressure fluctuation during contact. Recently Andrews[11]) suggested some modification of Hertz's theory for the collision of two similar balls and has shown experimentally that $(t - t_0)$ is inversly proportional to $v_0{}^n$ where t is the duration of contact v_0 is the velocity of impact, t_0 and n are constants depending on the nature of the balls.

In a previous paper[12]) we have extended the theory of Boussinesq for the longidudinal vibration of a bar struck by a hard load to the case of an elastic load. In this paper we shall further extend the theory in the light of the Hertz's theory of impact.

The differential equation of the extensional vibration is

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

[1]) Hertz: J. f. Math., Bd. 92 (1881), Love's Elasticity 4th edition, art. 139.
[2]) Poisson: Bulletin des Sciences de la société Philomathique (1824).
[3]) Saint Venant: Journ. de Math. pure et appl., t. 12, p. 237—376 (1867).
[4]) Voigt: Ann. Phy. Chem., Bd. 19 (1882). Sitz. d. Berl. Akad., p. 683 (1882).
[5]) Hausmanninger: Ann. Phy. Chem., Bd. 25, p. 189—202 (1885).
[6]) Sebert and Hugoniot: Compt. Rend. (Paris), t. 95 (1882).
[7]) Boussinesq: Application des potentiels (Paris) (1885). Love: The Mathematical theory of Elasticity, 4th edition, art. 281, p. 431—441.
[8]) Sears: Proc. phil. soc. vol. 14, p. 257 (1908). Camb. Trans. phil. soc., vol. 21, p. 49—105 (1912).
[9]) Wagstaff: Phil. Mag., vol. 48, p. 147—158 (1924). Proc. Roy. Soc., vol. 105, p. 544—570 (1924).
[10]) Tschudi: Phy. Rev., vol. 18, p. 423—430 (1921), vol. 23, p. 756—759 (1924).
[11]) Andrews: Phil. Mag., vol. 8, p. 781—800 (1929), vol. 9, p. 593—610 (1930). Proc. phy. soc., vol. 43, p. 1—25 (1931). Approved Doctorate Thesis of the London University.
[12]) M. Ghosh: Ind. Phy. Math. Journ., vol. 3, p. 73—79 (1932).

where (c) is the velocity of propagation of the longitudinal wave along the bar and is given by $c^2 = \frac{E_1 a}{\varrho}$, E_1 being the Youngs modulus, a the cross section, ϱ the mass per unit length, of the bars. w is the longitudinal displacement along the bar, s is measured from the fixed end.

The bar being fixed at the end $s=0$ the value of (w) is zero at the point. The terminal condition at $s=l$ is given by the equation of motion of the striking body which is also supposed to be elastic.

Just after contact between the load and the free end of the bar, Hertz's law of compression is obeyed, until the pressure exerted, attains the value P_0. Beyond P_0 the compression of the load follows Hooke's law, and waves are generated in the bar from the struck end. After a time Hooke's law is over and the pressure again falls to P_0. From this value, the pressure falls to zero, following Hertz's law, when there is no more contact. The detailed calculation for the different stages cited above will be made below.

Following the method of Hertz the equation of motion of the load striking at the free end of the bar is

$$P = M \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -k z^{3/2} \quad \ldots \quad (2),$$

where (P) is the pressure exerted by the load and (z) the displacement of its centre of gravity, is

$$z = w_{s=l} + \xi,$$

(ξ) being the compression of the load. In (2)[13],

$$k = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \Big/ (\vartheta_1 + \vartheta_2) \quad \ldots \quad (3),$$

where (r_1) is the radius of the hemispherical free end of the bar, and (r_2) the radius of the spherical surface of the load in contact, ϑ_1 and ϑ_2 are the elastic constants of the bar and the load respectively and are given by

$$\vartheta_1 = (1-\sigma_1^2)/E_1 \cdot \pi, \qquad \vartheta_2 = (1-\sigma_2^2)/E_2 \cdot \pi.$$

where E_1 and E_2 are Young modulus and σ_1 and σ_2 the corresponding Poisson's ratios. It is evident that when the end of the bar is plane, $r_1 = \infty$ and k reduces to

$$k = 3\pi r_2 / 4 (\vartheta_1 + \vartheta_2) \quad \ldots \quad (3b).$$

From (2) we get on integrating

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \frac{4}{5}\frac{k}{M} z^{5/2} = \text{Const}.$$

As at $t=0$, $z=0$, $\dot z = v_0$, so we have

$$v_0^2 - \dot z^2 = \frac{4}{5}\frac{k}{M} z^{5/2} \quad \ldots \quad (4).$$

Supposing that the limiting values of z and $\dot z$ at the end of Hertz's period are (z_0) and (v_1) respectively where $z_0 = w_0 + \xi_0$, w_0, ξ_0 being the local statical compression[14]) of the end of the rod, and the load, near the point of contact, we have

$$P_0 = -\frac{k}{M} z_0^{3/2} \quad \ldots \quad (5)$$

and from (4)

$$z_0 = \left\{\frac{5M}{4k}(v_0^2 - v_1^2)\right\}^{2/5} \quad \ldots \quad (5b).$$

From (4) we have for time (τ) taken to produce the compression z_0:

$$\tau = \frac{1}{v_0} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{4 k z^{5/2}}{5 M v_0^2}}} = \frac{z_m}{v_0} \int_0^{z_0/z_m} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{5/2}}} \quad \ldots \quad (6),$$

[13]) Love's elasticity 4th ed., art. 140.

[14]) Hertz; (Loc. cit).

where z_m which is equal to $\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{M}{k} v_0^2\right)^{2/5}$ is the maximum value of z which should have been reached if the bar were not thrown into the state of vibration. Now $z_0 < z_m$ i.e. $z_0/z_m < 1$, so the integral (6) can be eavaluated graphically between 0 and 1, without difficulty.

Now, when the pressure has reached a value P_0, the Hertz's period is over, and the pressure henceforth obeys Hooke's law; so the equation of motion of the load is

$$P - P_0 = M\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_{s=l} = -E_2(\xi - \xi_0) \text{ (from Hooke's law)} \quad \text{(7a)},$$

$$= -E_1 a \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_{s=l} \text{ (from the terminal condition at } s = l\text{)} \quad \text{(7b)}.$$

The solution of (1) is of the form

$$w = F(ct - s) + \varphi(ct + s) \quad \text{(8)},$$

where F and φ are arbitrary functions. At $s = 0$, $w = 0$ this reduces the equation (8) to the form

$$w = F(ct - s) - F(ct + s) \quad \text{(9)}.$$

From (7b) with the help of (9) we have

$$\xi - \xi_0 = -\lambda[F'(ct - l) + F'(ct + l)] \quad \text{(10)},$$

where $\lambda = E_1 a/E_2$.

Again substituting the value of $(\xi - \xi_0)$ from (10) and (w) from (9) in Eq. (7) we have

$$\left.\begin{aligned} &Mc^2\{F''(ct-l) - F''(ct+l)\} - Mc^2\lambda\{F'''(ct-l) + F'''(ct+l)\} = E_1 a\{F'(ct-l) + F'(ct+l)\} \\ &\text{or} \\ &F'''(\zeta) + \frac{1}{\lambda}F''(\zeta) + \frac{E_2}{Mc^2}F'(\zeta) = \frac{2}{\lambda}F''(\zeta - 2l) - \Big\{F'''(\zeta - 2l) \\ &\qquad + \frac{1}{\lambda}F''(\zeta - 2l) + \frac{E_2}{Mc^2}F'(\zeta - 2l)\Big\} \end{aligned}\right\} \quad \text{(11)}.$$

The integral of the Eq. (11) is always of the form

$$F'(\zeta) = A \exp. q\zeta + B \exp. p\zeta + \frac{2}{\lambda}\frac{F''(\zeta - 2l)}{f(D)} - F'(\zeta - 2l) \quad \text{(12)},$$

where q and p are the roots of the equation

$$f(D) = D^2 + \frac{D}{\lambda} + E_2/Mc^2 = 0$$

and are given by

$$[q, p] = \left\{-\frac{E_2}{E_1 a} \pm \sqrt{\frac{E_2^2}{E_1^2 a^2} - \frac{4E_2}{Mc^2}}\right\} \Big/ 2 \quad \text{(13)}$$

and A and B are constants of integration. When $3l > (\zeta - c\tau) > l$ the expression $\frac{2}{\lambda \cdot f(D)} F''(\zeta - 2l) - F'(\zeta - 2l)$ vanishes as $F(\zeta - 2l)$ is known in the interval $5l > (\zeta - c\tau) > 3l$. So $F(\zeta)$ reduces to, during $3l > (\zeta - c\tau) > l$

$$F'(\zeta) = A \exp. q\zeta + B \exp. p\zeta \quad \text{(14)}.$$

Now from the boundary conditions namely, at $t = \tau$, $\xi = \xi_0$ and $\dot{z} = v_1$ and from Eqs. (9) and (10) we have

$$F'(c\tau - l + 0) + F'(c\tau + l + 0) = 0 \quad \text{(15a)},$$

$$c[F'(c\tau - l + 0) - F'(c\tau + l + 0) - \lambda\{F''(c\tau - l + 0) + F''(c\tau + l + 0)\}] = -v_1 \quad \text{(15b)},$$

or we have

$$F'(c\tau + l + 0) = 0 \quad \text{(16a)}$$

and

$$F''(c\tau + l + 0) = v_1/c\lambda \quad \text{(16b)}.$$

Hence from (12), (16a, b) reduce to

$$A \exp. q(c\tau + l) + B \exp. p(c\tau + l) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (17a)$$

and

$$A q \cdot \exp. q(c\tau + l) + B p \exp. p(c\tau + l) = v_1/c\lambda \quad . \quad . \quad . \quad (17b).$$

On solving (17)

$$A = v_1/c\beta \exp. q(c\tau + l), \quad B = -v_1/c\beta \exp. p(c\tau + l) \quad . \quad . \quad . \quad (18a),$$

where

$$\beta = \lambda(q - p) \text{ and } \lambda = E_1 a/E_2 = -1/(a + b) \quad . \quad . \quad . \quad (18b).$$

Substituting this value of A and B in Eq. (12) we get

$$F'(\zeta) = \frac{v_1}{c\beta}\{\exp. q(\zeta - c\tau - l) - \exp. p(\zeta - c\tau - l)\} \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

When $5l > \zeta - c\tau > 3l$ we have

$$F''(\zeta - 2l) = \frac{v_1}{c\beta}\{q \cdot \exp. q(\zeta - c\tau - 3l) - p \exp. p(\zeta - c\tau - 3l)\} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

and the Eq. (12) can be written

$$F'(\zeta) = A \exp. q\zeta + B \exp. p\zeta + \frac{2v_1}{c\beta \cdot \lambda} \cdot \frac{1}{f(D)}\{q \exp. q(\zeta - c\tau - 3l) - p \exp. p(\zeta - c\tau - 3l)\}$$

$$-\frac{v_1}{c\beta}\{\exp. q(\zeta - c\tau - 3l) - \exp. p(\zeta - c\tau - 3l)\},$$

or we have

$$\left.\begin{aligned} F'(\zeta) = A \exp. q\zeta + B \exp. p\zeta + \frac{2v_1}{c\beta^2}(\zeta - c\tau - 3l) \\ \{q \exp. q(\zeta - c\tau - 3l) + p \exp. p(\zeta - c\tau - 3l)\} \\ -\frac{v_1}{c\beta}\{\exp. q(\zeta - c\tau - 3l) - \exp. p(\zeta - c\tau - 3l)\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

The condition of continuity of ξ and $\dot{z}$ at $t = 2l/c + \tau$ give

$$F'(c\tau + l - 0) + F'(c\tau + 3l - 0) = F'(c\tau + l + 0) + F'(c\tau + 3l + 0) \quad . \quad . \quad . \quad (22a)$$

and

$$\left.\begin{aligned} F'(c\tau + l - 0) - F'(c\tau + 3l - 0) - \lambda\{F''(c\tau + l - 0) + F''(c\tau + 3l - 0)\} \\ = F'(c\tau + l + 0) - F'(c\tau + 3l + 0) - \lambda\{F''(c\tau + l + 0) + F''(c\tau + 3l + 0)\} \end{aligned}\right\} \quad (22b)$$

or from (19) and (21) Eq. (22a, b) become

$$\frac{v_1}{c\beta}\{\exp. q \cdot 2l - \exp. p \cdot 2l\} = A \exp. q(c\tau + 3l) + B \exp. p(c\tau + 3l) \quad . \quad . \quad . \quad (23a)$$

and

$$\frac{v_1}{c\beta}\{q \cdot \exp. q \cdot 2l - p \exp. p \cdot 2l\} = A \cdot q \exp. q(c\tau + 3l) + B \cdot p \exp. p(c\tau + 3l) + \frac{2v_1}{c\beta^2}(q + p) \quad . \quad (23b).$$

Solving the Eqs. (23a, b) we have

$$\left.\begin{aligned} A &= v_1/c\beta \exp. q(c\tau + l) + 2v_1/c\beta^3 \exp. q(c\tau + 3l) \\ B &= -v_1/c\beta \exp. q(c\tau + l) + 2v_1/c\beta^3 \exp. p(c\tau + 3l) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Hence when $5l > (\zeta - c\tau) > 3l$

$$\left.\begin{aligned} F'(\zeta) = \frac{v_1}{c\beta}\{\exp. q(\zeta - c\tau - l) - \exp. p(\zeta - c\tau - l)\} \\ + \frac{2v_1}{c\beta^3}[\{1 - \beta^2/2 + \beta q(\zeta - c\tau - 3l)\} \exp. q(\zeta - c\tau - 3l) \\ - \{1 - \beta^2/2 - \beta p(\zeta - c\tau - 3l)\} \exp. p(\zeta - c\tau - 3l)] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

In a similar way $F'(\zeta)$ for $7l > (\zeta - c\tau) > 5l$ and higher epochs can very easily be calculated.

The function $F(\zeta)$ can be determined by integrating $F'(\zeta)$ and the constant of integration is to be determined from the condition that there is no sudden change in $F(\zeta)$ at $s = l$ at the instant $t = \tau$. This leads to the following results.

When $3l > (\zeta - c\tau) > l$

$$F(\zeta) = \frac{v_1}{c\beta}\left[\frac{1}{q}\{\exp. q(\zeta - c\tau - l) - 1\} - \frac{1}{p}\{\exp. p(\zeta - c\tau - l) - 1\}\right] \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

When $5l > \zeta - c\tau > 3l$

$$\left.\begin{aligned} F(\zeta) = {} & F(\zeta) \text{ in eq. (26)} - \frac{v_1}{c\beta}\left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right)[\{\exp. q(\zeta - c\tau - 3l) - 1\}/q \\ & - \{\exp. p(\zeta - c\tau - 3l) - 1\}/p] \\ & + \frac{v_1}{c\beta^2}\left[\frac{1}{q}\{1 + (q\overline{\zeta - c\tau - 3l} - 1)\exp. q(\zeta - c\tau - 3l)\}\right. \\ & \left. + \frac{1}{p}\{1 + (p\overline{\zeta - c\tau - 3l} - 1)\exp. p(\zeta - c\tau - 3l)\}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (27).$$

In similar manner $F(\zeta)$ for $7l > \zeta - c\tau > 5l$ and for higher epochs can be evaluated.

Now from (7) the pressure due to the hammer is given by

$$P = P_0 + E_1 a F'(\zeta)_{s=l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

So, from (19) for the interval $3l > \zeta - c\tau > l$ the pressure is given by, as $E_1 a = c^2 \varrho$ where ϱ is the mass per unit length of the bar,

$$P_1 = P_0 + \frac{\varrho v_1 c}{\beta}\{\exp. qc(t - \tau) - \exp. pc(t - \tau)\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

From (25) the pressure for the interval $5l > \zeta - c\tau > 3l$ is given by

$$\left.\begin{aligned} P_2 = P_1 + \frac{2\varrho v_1 c}{\beta^3}[& \{1 - \beta^2/2 + \beta q\overline{c(t - \tau) - 2l}\}\exp. q\overline{c(t - \tau) - 2l} \\ & - \{1 - \beta^2/2 - \beta \cdot p\overline{c(t - \tau) - 2l}\}\exp. pc\overline{(t - \tau) - 2l}] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (30).$$

In a similar manner $P_3, P_4 \ldots P_n$ can be calculated.

In the case when the impact begins with Hooke's law i. e. Hertz's period (τ) at the beginning is zero, all the above expressions are reduced to those obtained in our previous paper (loc. cit.).

In the case when E_2 is large compared to E_1, the roots q and p given in (13) become (as $E_1 a = c^2 \varrho$ and $m = \varrho l / M$

$$\left.\begin{aligned} & q = -E_1 a / M c^2 = -\frac{1}{ml} = q_0 \text{ Say} \\ \text{and} \quad & p = -E_2 / E_1 c = p_0 \text{ Say} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Approximately, if we neglect q in comparison with p or $p\lambda = -1$. If moreover $\tau = 0$, we have

$$P_1 = \varrho v_0 c[\exp. q_0 ct - \exp. p_0 ct] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

$$\left.\begin{aligned} P_2 = \varrho v_0 c[& \exp. q_0 ct + (1 + q_0\overline{ct - 2l})\exp. q_0(ct - 2l) \\ & - \exp. p_0 ct - (1 - p_0\overline{ct - 2l})\exp. p_0(ct - 2l)] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

In the case of the rigid hammer $E_2 = \infty$ and so $F(\zeta)$ given in Eqs. (26) and (27) and the corresponding pressures become indentical with those obtained by J. Boussinesq (loc. cit.).

We have already seen in (13) that q and p have values

$$\left\{-\frac{E_2}{E_1 a} \pm \sqrt{\frac{E_2^2}{E_1^2 a^2} - \frac{4 E_2}{M c^2}}\right\} \Big/ 2.$$

In the case

$$4 E_1 a / M c^2 > E_2 / E_1 a, \quad \text{i. e.}$$

wher the hammer is light and soft, we have

$$\left.\begin{aligned} q &= \mu + i \nu \\ p &= \mu - i \nu \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

where $\mu = - E_2 / 2 E_1 a$ and $\nu = \sqrt{\frac{E_2}{M c^2} - \frac{E_2^2}{4 E_1^2 a^2}}$ . . . . (35).

With the help of (34) and (35) Eqs. (29) and (30) are reduced to

$$P_1 = P_0 + \frac{\varrho v_1 c}{\nu \lambda} e^{\mu c (t - \tau)} \operatorname{Sin} \nu c (t - \tau) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36),$$

$$\left.\begin{aligned} P_2 = P_1 &+ \frac{\varrho v_1 c}{\lambda^3 \nu^3} e^{\mu (c \overline{t - \tau} - 2 l)} \cdot \operatorname{Sin} \nu (c \overline{t - \tau} - 2 l) \\ &+ \frac{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}{\lambda^2 \nu^2} (c \overline{t - \tau} - 2 l) e^{\mu (c \overline{t - \tau} - 2 l)} \cdot \operatorname{Sin} \left\{ \nu c (\overline{t - \tau} - 2 l) - \tan^{-1} \frac{\mu}{\nu} \right\} \end{aligned}\right\} \quad (37).$$

Duration of Contact: The duration of contact Φ is generally defined as the root of the pressure function P_n equated to zero. But such a defination is not possible in the case of the Hertzian impact at the beginning and at the end. Since there is an extension of the duration due to the loss of the residual pressure P_0. This extension may be called the Hertz's period at the end and has the magnitude (τ) given by Eq. (6).

Now the pressure cannot terminate within the first epoch unless q and p are imaginary. In this case the pressure given by eq. (36) falls to the value P_0 when

$$t = \frac{\pi}{\nu c} + \tau$$

which is the smallest positive root of the eq. $(P_1 - P_0) = 0$ (see eq. (36)); and the duration of contact Φ is given by

$$\Phi = \frac{\pi}{\nu c} + 2 \tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (38),$$

where τ is given by eq. (6) and (ν) by (35).

In all other cases the pressure terminates at a higher epoch, depending on the elastic constants and the masses of the bar and the load. It is evident that in all cases the expression for the duration of contact Φ is of the form

$$\Phi = (\Phi_0)_n + 2 \tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39),$$

where $(\Phi_0)_n + \tau$ is the root of the pressure equation. $(P_n - P_0) = 0$ P_n being the pressure function at the nth epoch. Thus we see from (39) that Φ depends on v_0 and also on the wave produced in the bar. This fully explains Tschudi's experiment referred to in the introduction. More-over the view taken up is confirmed by the recent works of Andrew's.

My best thanks are due to Dr. K. C. Kar, D. Sc., for his inspiring suggestions and continual guidance in this present work. 393

Physical Research Laboratory
Presidency College
Calcutta
December 1932.

Prüfung der Einheitlichkeit eines Massenfabrikates.

Von *Fr. A. Willers* in Freiberg (Sa.).

Massenfabrikate werden meist in mehreren parallellaufenden Fabrikationsgängen hergestellt. Keiner dieser Herstellungsgänge liefert ein ganz gleichmäßiges Fabrikat; vielmehr weisen die durch Messung einer Eigenschaft gelieferten Merkmalswerte gewisse Schwankungen auf. Jede Eigenschaft wird daher durch das Mittel der entsprechenden Merkmalswerte und durch das mittlere Abweichungsquadrat von diesem Mittelwert charakterisiert. Stücke verschiedener Serien werden oft größere Unterschiede aufweisen, als Stücke derselben Fabrikationsserie. Zur Entscheidung darüber, ob diese Unterschiede zwischen Stücken verschiedener Fabrikationsserien auf zufälligen oder systematischen Fabrikationsunterschieden beruhen, kann die in § 1 zunächst für eindimensionale Verteilungen abgeleitete Lexissche Zahl benutzt werden. Zur Beurteilung der Abweichung der wirklich berechneten Lexisschen Zahl von ihrem Erwartungswert 1 kann ihre in § 2 hergeleitete Streuung dienen. In § 3 werden die Betrachtungen auf zweidimensionale Verteilungen erweitert. — Wichtig ist, daß die aufgestellten Kriterien im allgemeinen auch dann nicht versagen, wenn man nicht alle Fabrikationsgegenstände berücksichtigt, sondern die Untersuchung auf eine nicht zu kleine, sinngemäß ausgewählte Probe beschränkt.

§ 1. Lexissche Zahl einer eindimensionalen Verteilung.

1. Es möge ein Fabrikat vorliegen, das aus N Gegenständen besteht, also ein endliches Kollektiv vom Umfange N. Dieses sei in m Fabrikationsgängen hergestellt, die die untereinander verschiedenen Umfänge

$$n_1;\quad n_2;\quad n_3;\quad \ldots .\, n_m,\quad \sum_{j=1}^{m} n_j = N \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

haben. Es sei an jedem der Fabrikationsgegenstände nur ein Merkmalswert gemessen, so daß wir es mit einer eindimensionalen Verteilung zu tun haben. Die Merkmalswerte werden mit x_{jk} bezeichnet, wo sich der erste Index auf die Serie, der zweite auf die Nummer in der Serie bezieht. Der Nullpunkt der Messung sei dabei so gewählt, daß der Mittelwert über sämtliche Merkmalswerte, den wir hier als Erwartungswert bezeichnen wollen, Null ist.

$$\mathfrak{E}(x_{jk}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} x_{jk} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Das mittlere Abweichungsquadrat des ganzen Fabrikates von diesem Erwartungswert, d. h. die Streuung wird

$$M_2 = \mathfrak{Str}(x_{jk}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} (x_{jk}^2) = \mathfrak{E}(x_{jk}^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Bezeichnet man ferner mit a_j den Mittelwert der j-ten Serie und mit M_2^j das mittlere Abweichungsquadrat von diesem Mittelwert in der j-ten Serie, so ist

$$a_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} x_{jk} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

$$M_2^j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} (x_{jk} - a_j)^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} x_{jk}^2 - a_j^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Schließlich braucht man noch das gewogene Abweichungsquadrat der Serienmittelwerte von $\mathfrak{E}(x_{jk})$

$$M_2^s = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} n_j a_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j} \left(\sum_{k=1}^{n_j} x_{jk}^2 + \sum_{k \neq r}^{1 \ldots n_j} x_{jk} x_{jr} \right) \quad \ldots \ldots (6),$$

wo in der Klammer die zweite Summe über alle k von 1 bis n_j und über alle r von 1 bis n_j mit Ausnahme der Werte $k = r$ zu bilden ist. Zwischen den mittleren Abweichungsquadraten besteht ein Zusammenhang. Bezeichnet man mit M_2^e den gewogenen Mittelwert der mittleren Abweichungsquadrate in den einzelnen Serien (Gewicht gleich Serienumfang), so wird

$$M_2 = \mathfrak{Str}(x_{jk}) = M_2^s + M_2^e \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7).$$

Bei gleichem M_2 wird somit, wenn systematische Unterschiede zwischen den Serien vorliegen, während innerhalb der Serien ziemliche Einheitlichkeit herrscht, M_2^s verhältnismäßig groß gegen M_2^e. Liefern dagegen die einzelnen Fabrikationsgänge ziemlich gleichmäßige Fabrikate, ändert sich aber während der Fabrikation die Güte des Fabrikates, dann wird umgekehrt M_2^e verhältnismäßig groß gegen M_2^s.

2. Um ein Maß für die Einheitlichkeit zu bekommen, vergleicht man den wirklich berechneten Wert von M_2^s mit dem, den man erhält, wenn man die Merkmalswerte aller Fabrikationsgegenstände ohne Rücksicht auf die Herstellungsserien auf alle möglichen Weisen ordnet, Serien von entsprechendem Umfang abteilt, jedesmal M_2^s bestimmt und den Mittelwert aller dieser M_2^s, also $\mathfrak{E}(M_2^s)$ bildet. Der Erwartungswert wird hier für ein neues endliches Kollektiv gebildet, das aus dem alten in der eben beschriebenen Art abgeleitet ist. Da nach dem Durcheinanderwerfen der Serien der erste Index keine Bedeutung mehr hat, werden wir den Merkmalswerten nur noch einen Index geben, der alle Werte von 1 bis N annehmen kann. Diese N Merkmalswerte kann man auf $N!$ verschiedene Arten anordnen. Jeder Wert x_i^2 kann in diesen $N!$ Anordnungen in der j-ten Serie $n_j\,(N-1)!$ mal, jeder Summand $x_i x_k\,(i \neq k)$ $n_j\,(n_j-1)(N-2)!$ mal vorkommen. Führt man also die oben angegebene Mittelwertbildung aus, wird

$$\mathfrak{E}(M_2^s) = \frac{1}{N}\left(\frac{m}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{N-m}{N(N-1)}\sum_{i \neq k}^{1\ldots N} x_i x_k\right),$$

wenn man beachtet, daß $\sum_{j=1}^{m}(n_j-1) = N-m$ ist. Ferner ist

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} x_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i \neq k}^{1\ldots N} x_i x_k = N \cdot M_2 + \sum_{i \neq k}^{1\ldots N} x_i x_k = 0\,,$$

also

$$\sum_{i \neq k}^{1\ldots N} x_i x_k = -N \cdot M_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Somit wird

$$\mathfrak{E}(M_2^s) = \frac{1}{N}\left[m\,M_2 - \frac{N-m}{N-1}\,M_2\right] = \frac{m-1}{N-1}\,M_2 \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

Für Serien gleichen Umfanges setzt man $N = m \cdot n$; wächst die Zahl der Serien stark an, kann man als Näherungswert den Grenzwert von (9) für $m \to \infty$ benutzen:

$$\mathfrak{E}(M_2^s) = M_2 / n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

3. Als Lexissche Zahl wählt man den Wert

$$L = \frac{M_2^s}{\mathfrak{E}(M_2^s)} = \frac{(N-1)\cdot M_2^s}{(m-1)\cdot M_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

wo für M_2^s der Wert (6), für M_2 (3) zu setzen ist. Hat man ein ganz gleichmäßiges Fabrikat, wird M_2^s kaum von seinem Erwartungswert abweichen, L wird also nahe an 1 liegen, die vorliegende Reihe der Merkmalswerte weist normale Dispersion auf. Sind dagegen systematische Unterschiede zwischen den einzelnen Fabrikationsserien vorhanden, wird M_2^s größer als sein Erwartungswert sein, also $L > 1$ werden; die Reihe weist übernormale Dispersion auf. Zeigen sich aber in den einzelnen Fabrikationsserien starke Güteunterschiede, während der Unterschied zwischen den einzelnen Serien gering ist, wird M_2^s kleiner als sein Erwartungswert, $L < 1$ sein; man hat unternormale Dispersion. Ein Urteil über die Einheitlichkeit des Fabrikates gewinnt man aber erst durch Vergleich der Abweichung der nach (11) berechneten Zahl von 1 mit der in § 2 berechneten wahrscheinlichen Abweichung.

4. Durch ähnliche Überlegungen wie die, die oben zu dem Erwartungswert M_2^s geführt haben, kann man auch den Erwartungswert für das mittlere Abweichungsquadrat in einer Serie finden. Es wird

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{E}(M_2^j) &= \mathfrak{E}\left[\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} x_i^2 - a_j^2\right] = \frac{1}{n_j^2}\,\mathfrak{E}\left[n_j\sum_{i=1}^{n_j} x_i^2 - \Big(\sum_{k=1}^{n_j} x_k\Big)^2\right]\\ &= \frac{n_j-1}{n_j^2}\,\mathfrak{E}\Big(\sum_{i=1}^{n_j} x_i^2\Big) - \frac{1}{n_j^2}\,\mathfrak{E}\Big(\sum_{k \neq r}^{1\ldots n_j} x_k x_r\Big)\\ &= \frac{n_j-1}{n_j}\,M_2 + \frac{n_j-1}{n_j(N-1)}\,M_2 = \frac{n_j-1}{n_j}\cdot\frac{N}{N-1}\,M_2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Dabei muß man beachten, daß hier die Zahl der Summanden $N!:(N-n_j)!$ ist, daß x_i^2 $n_j(N-1)!:(N-n_j)!$ mal, $x_k x_r$ dagegen $n_j(n_j-1)(N-2)!:(N-n_j)!$ mal vorkommen. Aus (12) berechnet sich der Erwartungswert für das Mittel der mittleren Abweichungsquadrate in einer Serie

$$\mathfrak{E}(M_2^e) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{m}(n_j-1)\cdot\frac{N}{N-1}M_2 = \frac{N-m}{N-1}M_2\,.$$

Ersetzt man nun den Erwartungswert durch den in dem speziellen Fall berechneten Wert M_2^e, so kann man aus dieser Gleichung einen Näherungswert für M_2 entnehmen und in (11) einsetzen. Diesen Wert

$$L_2 = \frac{N-m}{m-1}\cdot\frac{M_2^s}{M_2^e}$$

kann man auch als Lexissche Zahl benutzen. Im allgemeinen wird aber L_2 stärker von 1 abweichen als L, weil bei gleichem M_2 nach (7) M_2^s und M_2^e in entgegengesetztem Sinne variieren. Wir beschäftigen uns weiterhin nur mit dem Wert (11), der für den Fall der Alternative, d. h. also für den Fall, wo man das Merkmal nicht messen, sondern nur sein Vorhandensein oder sein Nichtvorhandensein feststellen kann, in den bekannten Ausdruck, wie ihn z. B. v. Mises angibt[1]), übergeht.

§ 2. Streuung der Lexisschen Zahl.

1. Bei Berechnung der Streuung von L beachtet man, daß in dem in § 1, 2 beschriebenen Kollektiv die Werte N, m und M_2 konstant sind; die Streuung von L wird daher bis auf einen Faktor mit der Streuung von M_2^s übereinstimmen. Den zweiten Summanden in

$$\mathfrak{Str}(M_2^s) = \mathfrak{E}(M_2^s)^2 - (\mathfrak{E}(M_2^s))^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

kann man aus (9) entnehmen; für den ersten muß man den Erwartungswert des Quadrates von (6) berechnen

$$(M_2^s)^2 = \frac{1}{N^2}\left[\frac{1}{n_1}\left(\sum_{i=1}^{n_1}x_{1i}^2 + \sum_{k\neq r}^{1\ldots n_1}x_{1k}x_{1r}\right) + \frac{1}{n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_2}x_{2i}^2 + \sum_{k\neq r}^{1\ldots n_2}x_{2k}x_{2r}\right)\ldots\right]^2 \quad \ldots \quad (14).$$

Das Quadrat der eckigen Klammer setzt sich aus den Quadraten und den doppelten Produkten der einzelnen runden Klammern mit den Faktoren $1/n_i^2$ bzw. $1/n_i n_j$ zusammen, deren Erwartungswert jetzt einzeln zu berechnen ist. Das Quadrat des j-ten Summanden der eckigen Klammer wird, wenn man wieder den ersten Index fortläßt,

$$S_j^2 = \frac{1}{n_j^2}\left(\Sigma x_i^4 + 3\Sigma x_k^2 x_r^2 + 4\Sigma x_k^3 x_r + 6\Sigma x_k^2 x_r x_s + \Sigma x_k x_r x_s x_t\right).$$

Hier sind die Summen über alle möglichen Werte von 1 bis n_j zu bilden, ausgeschlossen sind dabei aber in den Summanden, die mehrere Faktoren enthalten, die Fälle, in denen zwei oder mehr Indizes gleich werden. Bei der zur Berechnung des Erwartungswertes nötigen Summenbildung über die $N!$ verschiedenen Werte kommt jedes

$$\left.\begin{array}{lll} x_i^4 & n_j(N-1)! & \text{mal} \\ x_k^2 x_r^2 \text{ und } x_k^3 x_r & n_j(n_j-1)(N-2)! & \text{mal} \\ x_k^2 x_r x_s & n_j(n_j-1)(n_j-2)(N-3)! & \text{mal und} \\ x_k x_r x_s x_t & n_j(n_j-1)(n_j-2)(n_j-3)(N-4)! & \text{mal} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

in dem Quadrat des j-ten Summanden vor. Aus diesem Quadrat geht in den Erwartungswert ein

$$\frac{1}{n_j}M_4 + \frac{3(n_j-1)}{n_j(N-1)}A + \frac{4(n_j-1)}{n_j(N-1)}B + \frac{6(n_j-1)(n_j-2)}{n_j(N-1)(N-2)}C + \frac{(n_j-1)(n_j-2)(n_j-3)}{n_j(N-1)(N-2)(N-3)}D\,,$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma x_i^4 = N\cdot M_4; & \Sigma x_k^2 x_r^2 = N\cdot A; & \Sigma x_k^3 x_r = N\cdot B; \\ \Sigma x_k^2 x_r x_s = N\cdot C; & \Sigma x_k x_r x_s x_t = N\cdot D & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16).$$

[1]) v. Mises: Wahrscheinlichkeitsrechnung ... Leipzig-Wien 1931, Seite 294, Formel (27).

Hier sind die Summen über alle Indizes von 1 bis N zu nehmen unter Ausschluß der Summanden, in denen zwei oder mehr Indizes gleich sind. Summation über sämtliche m Werte n_j gibt als Anteil der Quadrate am Erwartungswert

$$\frac{1}{N^2}\left\{\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j}\left[M_4-\frac{3A+4B}{N-1}+\frac{12C}{(N-1)(N-2)}-\frac{6D}{(N-1)(N-2)(N-3)}\right]\\&+\frac{m}{N-1}\left[3A+4B-\frac{18C}{N-2}+\frac{11D}{(N-2)(N-3)}\right]+\frac{N}{(N-1)(N-2)}\left[6C-\frac{6D}{N-3}\right]\\&+\frac{\sum_{j=1}^{m}n_j^2 D}{(N-1)(N-2)(N-3)}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (17).$$

2. Dazu kommt noch der Anteil der doppelten Produkte. Durch Multiplikation des i-ten und k-ten Summanden der eckigen Klammer in (16) ergibt sich

$$P_{jk}=\frac{2}{n_j n_k}\left(\Sigma x_{ji}^2 x_{kr}^2+\Sigma x_{ji}^2 x_{kr} x_{ks}+\Sigma x_{ji} x_{jr} x_{ks}^2+\Sigma x_{ji} x_{jr} x_{ks} x_{kt}\right).$$

Ist der erste Index j, so ist der zweite von 1 bis n_j, ist der erste k, so ist der zweite von 1 bis n_k zu summieren. Bei Bildung des Erwartungswertes kommt jedes

$$\left.\begin{array}{lll} x_{ji}^2 x_{kr}^2 & n_j n_k (N-2)! & \text{mal}\\ x_{ji}^2 x_{kr} x_{ks} & n_j n_k (n_k-1)(N-3)! & \text{mal}\\ x_{ji} x_{jr} x_{ks}^2 & n_j (n_j-1) n_k (N-3)! & \text{mal}\\ x_{ji} x_{jr} x_{ks} x_{kt} & n_j (n_j-1) n_k (n_k-1)(N-4)! & \text{mal}\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

vor. Der Beitrag von P_{jk} zum Erwartungswert wird daher

$$\frac{2}{N-1}A+\frac{2(n_k+n_j-2)}{(N-1)(N-2)}C+\frac{2(n_k n_j-n_k-n_j+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)}D.$$

Summiert man das über alle k von 1 bis m und über alle j ebenfalls von 1 bis m mit Ausnahme von $j=k$ und beachtet, daß

$$\sum_{k \neq j}^{1\ldots m}(n_k+n_j-2)=2N(m-1)-2m(m-1)$$

$$\sum_{k \neq j}^{1\ldots m}(n_k n_j-n_k-n_j+1)=N^2-\sum_{k=1}^{m}n_k^2-2N(m-1)+m(m-1)$$

ist, so erhält man als Beitrag aller doppelten Produkte

$$\frac{1}{N^2}\left\{\frac{2m(m-1)}{N-1}A+\frac{4(N-m)(m-1)}{(N-1)(N-2)}C+\frac{2\left(N^2-\sum_{k=1}^{m}n_k^2-2N(m-1)+m(m-1)\right)}{(N-1)(N-2)(N-3)}D\right\} \quad (19).$$

Die Werte A, B, C und D lassen sich aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{N}x_i\Big)^4 &= N(M_4+3A+4B+6C+D) &&=0\\ \sum_{i=1}^{N}x_i\cdot\sum_{k=1}^{N}x_k^3 &= N(M_4+B) &&=0\\ \Big(\sum_{i=1}^{N}x_i\Big)^2\cdot\sum_{k=1}^{N}x_k^2 &= N(N M_2^2+2B+C) &&=0\\ \Big(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\Big)^2 &= N(M_4+A) &&=N^2 M_2^2\end{aligned}$$

berechnen. Man findet

$$A=-M_4+N M_2^2;\quad B=-M_4;\quad C=2M_4-N M_2^2;\quad D=-6M_4+3N M_2^2 \quad . \quad . \quad (20).$$

Setzt man diese Werte in (17) und (19) ein, subtrahiert davon das Quadrat von (9) und zieht zusammen, so findet man

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Str}(M_2^s) = {} & \frac{M_4}{N^2(N-1)(N-2)(N-3)}\Bigg[\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j}(N^3+N^2)+6\sum_{j=1}^{m}n_j^2-2N^2m^2+3N^2m \\ & \qquad +2Nm^2-3Nm-8N^2\Bigg] \\ & +\frac{M_2^2}{N(N-1)^2(N-2)(N-3)}\Bigg[-3\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j}(N-1)^2N-3(N-1)\sum_{j=1}^{m}n_j^2 \\ & +N^3m^2-3N^2m^2-N^3m+2N^2m+6Nm^2+3N^3+N^2-6Nm-6m^2-6N+9m\Bigg]\end{aligned}\right\} \quad (21).$$

Haben sämtliche Serien die gleiche Länge n, wird daraus

$$\mathfrak{Str}(M_2^s) = \frac{N-n}{N(N-1)^2(N-2)(N-3)n^2}\left\{\begin{aligned}&(N-1)[2Nn-N^2-6n^2+3N]M_4\\&+N[(N-2)^3+3n^2(N-1)-4Nn+6n-1)]M_2^2\end{aligned}\right\} \quad (22).$$

Wächst die Zahl m der Serien sehr stark an, so kann man mit ausreichender Näherung den Grenzwert von (21) bzw. (22) als Näherungswert für die Streuung wählen.

$$\mathfrak{Str}(M_2^s) = M_2^2/n^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23).$$

Wird bei endlichbleibendem m der Umfang aller Serien sehr groß, so konvergiert der Wert der Streuung gegen Null.

3. Um die Streuung von L zu bestimmen, muß man $\mathfrak{Str}(M_2^s)$ mit $[(N-1):(m-1)M_2]^2$ multiplizieren. Insbesondere erhält man aus (23)

$$\mathfrak{Str}(L) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24).$$

Oft wird es genügen, diesen Wert zu benutzen. Berechnet man aus der Streuung die wahrscheinliche Abweichung, kann man

$$L = 1 \pm 0{,}674\,\frac{N-1}{(m-1)M_2}\sqrt{\mathfrak{Str}(M_2^s)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

setzen. Liegt der wirklich berechnete Wert nahe dieser Grenze, so ist unter der Annahme, daß die M_2^s annähernd eine Gaußsche Verteilung bilden, die Wahrscheinlichkeit, daß systematische Unterschiede zwischen den einzelnen Fabrikationsgängen sind, etwa so groß wie die, daß keine vorhanden sind. Ist dagegen die Abweichung wesentlich kleiner, so kann man mit großer Wahrscheinlichkeit sagen, daß ein einheitliches Fabrikat vorliegt, ist sie wesentlich größer, ist sehr wahrscheinlich das Gegenteil der Fall.

4. Mit den gleichen Mitteln, die man zur Berechnung der Streuung von M_2^s benutzte, kann man auch

$$\mathfrak{Str}(M_2^j) = \mathfrak{E}[M_2^j - \mathfrak{E}(M_2^j)]^2 = \mathfrak{E}(M_2^j)^2 - [\mathfrak{E}(M_2^j)]^2$$

berechnen. Den zweiten Summanden entnimmt man aus (12); im ersten haben, wenn wir wieder den ersten Index fortlassen, die einzelnen Glieder die Form

$$\begin{aligned}(M_2^j)^2 &= \frac{1}{n^4}[(n-1)\Sigma x_i^2 - \Sigma x_i x_r]^2 \\ &= \frac{1}{n^4}[(n-1)^2\Sigma x_i^4 + (n^2-2n+3)\Sigma x_i^2 x_r^2 - 4(n-1)\Sigma x_i^3 x_r \\ &\qquad - 2(n-3)\Sigma x_i^2 x_r x_s + \Sigma x_i x_r x_s x_t],\end{aligned}$$

wo wieder alle Indizes von 1 bis n laufen und die Fälle auszuschließen sind, in denen in einem Summanden zwei oder mehr Indizes gleich sind. Bei Bildung des Erwartungswertes ist hier wie in (12) die Zahl der Summanden $N!/(N-n)!$, ebenso tritt beim Abzählen der Summanden überall, wo oben $(N-l)!$ stand, $(N-l)!/(N-n)!$ auf. Setzt man nach der Summenbildung die Werte (20) ein und benutzt (12), wird

$$\mathfrak{Str}(M_2^j) = \frac{N(n-1)(N-n)}{n^3(N-1)^2(N-2)(N-3)}[(N-1)(Nn-N-n-1)M_4-(N^2n-3N^2+6N-3n-3)M_2^2] \quad (26).$$

Läßt man hierin N unbegrenzt wachsen, erhält man als Grenzwert

$$\mathfrak{Str}(M_2^j) = \frac{n-1}{n^3}[(n-1)M_4-(n-3)M_2^2]\,[2] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27).$$

[2]) v. Mises, l. c., Seite 286, Formel (13).

5. In der Praxis wird man meist nicht sämtliche Fabrikationsgegenstände untersuchen, sondern wird aus jedem Herstellungsgang etwa die gleiche Anzahl herausgreifen und an diesen den Merkmalswert feststellen. Im ganzen messe man so etwa

$$z = n \cdot m$$

Stücke. Den Umfang des ganzen Fabrikates bezeichnen wir wie oben mit N. Aus den z Merkmalswerten berechnet man genau wie oben $M_2{}^s$ und den Streuungswert $M_2{}^s$ für sämtliche ausgewählten Stücke. Damit bildet man

$$L = \frac{(z-1)\, M_2{}^s}{(m-1)\, M_2{}^z} = \frac{(z-1)\, n\, M_2{}^s}{(z-n)\, M_2{}^z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Die weiteren Überlegungen entsprechen denen des § 2, 4, nur daß man statt $(N-l)!$ stets $(N-l)!/(N-z)!$ zu setzen hat, wenn man $\mathfrak{S}\mathrm{tr}\,(M_2{}^s)$ bildet. Nun muß man aber beachten, daß in (28) nicht nur der Zähler, sondern auch der Nenner eine Streuung aufweist. Im Zähler ist nach (22) bzw. (23) die Streuung von $M_2{}^s$ proportional $1/n^2$; die Streuung von $M_2{}^z$ im Nenner ist durch (26) bzw. (27) gegeben, wo man aber n durch z zu ersetzen hat, da ja jetzt eine Probe vom Umfange z herausgegriffen ist. Die Streuung von $M_2{}^z$ ist somit von der Größenordnung $1/z$. Unter Beachtung der vor den M_2 stehenden Faktoren findet man, daß die Streuung des Zählers proportional $1/n$, die des Nenners proportional $1/z$, also wesentlich kleiner ist. Da es sich nun bei der Beurteilung der Abweichung des Wertes L von 1 doch nur um eine Schätzung handelt, kann man die durch die geringe Streuung des Nenners hereingebrachte Unsicherheit vernachlässigen, und kann die Formel für L auch dann anwenden, wenn es sich nur um eine Probe aus dem ganzen Fabrikat handelt; allerdings muß diese die Gesamtverteilung gut wiedergeben.

§ 3. Lexissche Zahlen für zweidimensionale Verteilungen.

1. Es seien an dem k-ten Fabrikationsgegenstand der j-ten Serie die beiden Merkmalswerte x_{jk} und y_{jk} für zwei verschiedene Eigenschaften gemessen. Dabei sollen die Nullpunkte beider Messungen wieder so angenommen werden, daß

$$\mathfrak{E}(x_{jk}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} x_{jk} = 0; \qquad \mathfrak{E}(y_{jk}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} y_{jk} = 0 \quad \ldots \quad (29)$$

ist. Die Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen lassen sich auf solche zweidimensionalen Verteilungen direkt übertragen, solange man die Einheitlichkeit nur unter Beachtung einer der beiden Merkmale, ohne Rücksicht auf die Merkmalswerte der anderen Eigenschaft untersuchen will. Bezeichnet man das mittlere Abweichungsquadrat der Serienmittelwerte für das Merkmal x mit $M_{20}{}^s$ und für y mit $M_{02}{}^s$, und die entsprechenden Streuungen für das ganze Fabrikat mit M_{20} bzw. mit M_{02}, so erhält man entsprechend (11) zwei Lexissche Zahlen:

$$L_{20} = \frac{(N-1)\, M_{20}{}^s}{(m-1)\, M_{20}}; \quad L_{02} = \frac{(N-1)\, M_{02}{}^s}{(m-1)\, M_{02}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30).$$

Auch die Werte (22) bis (24) für die Streuung lassen sich ohne weiteres übertragen, wenn man nur M_2 durch M_{20} bzw. M_{02} und M_4 durch M_{40} bzw. M_{04} ersetzt.

2. Die Feststellung, daß die beiden Größen (30) sich wenig von 1 unterscheiden, genügt aber noch nicht zur Feststellung der Einheitlichkeit des Fabrikates, sondern es ist noch eine dritte Lexissche Zahl zu untersuchen, die den Zusammenhang der beiden Merkmale berücksichtigt. Dazu benutzt man das Moment M_{11} für die Gesamtheit der Fabrikationsgegenstände und $M_{11}{}^s$ für die Serienmittelwerte

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= \mathfrak{E}(x_{jk}\, y_{jk}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} x_{jk}\, y_{jk} \\ M_{11}{}^s &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} x_{jk}\, y_{jk} + \frac{1}{n_j} \sum_{k \neq r}^{1 \ldots n_j} x_{jk}\, y_{jr} \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (31).$$

Die Lexissche Zahl erhält man, wenn man den zweiten Wert durch seinen Erwartungswert dividiert. Dieser wird wie oben gebildet. Man hat wieder $N!$ mögliche Anordnungen, denn man muß beachten, daß man die beiden Merkmalswerte eines Fabrikationsgegenstandes jetzt nicht für sich behandeln darf, sondern daß beide immer die gleiche Stellennummer haben

müssen. Jedes $x_{jk}\,y_{jk}$ kommt im j-ten Summanden $n_j\,(N-1)!$ mal, jedes $x_{jk}\,y_{jr}$ kommt $n_j\,(n_j-1)\,(N-2)!$ mal vor. Da ferner

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \sum_{k=1}^{N} y_k = \sum_{i=1}^{N} x_i\,y_i + \sum_{i \neq k}^{1\ldots N} x_i\,y_k = N\,M_{11} + \sum_{i \neq k}^{1\ldots N} x_i\,y_k = 0$$

ist, erhält man durch die gleiche Rechnung wie in § 1

$$L_{11} = \frac{(N-1)\,M_{11}{}^{s}}{(m-1)\,M_{11}} \qquad \ldots \ldots \qquad (32).$$

Im Fall der Doppelalternative geht (32) bei gleicher Serienlänge in den von v. Mises angegebenen Ausdruck über[3]).

3. Zur Beurteilung der Genauigkeit von L_{11} ist wieder die Streuung zu berechnen, und zwar zunächst

$$\mathfrak{Str}\,(M_{11}{}^{s}) = \mathfrak{E}\,(M_{11}{}^{s})^2 - [\mathfrak{E}\,(M_{11}{}^{s})]^2 .$$

Darin ist der zweite Summand bereits zur Berechnung von L_{11} verwendet. Um den ersten zu bestimmen, ist das Quadrat des zweiten Ausdruckes in (31) zu bilden. Dabei treten wieder Quadrate und doppelte Produkte auf. Das Quadrat des j-ten Summanden wird, wenn wir wieder den ersten Index fortlassen,

$$S_j{}^2 = \frac{1}{n^2}\,(\Sigma\,x_k{}^2\,y_k{}^2 + 2\,\Sigma\,x_k\,x_r\,y_k\,y_r + \Sigma\,x_k{}^2\,y_r{}^2 + \Sigma\,x_k{}^2\,y_r\,y_s + \Sigma\,x_k\,x_r\,y_s{}^2$$
$$+ 4\,\Sigma\,x_k\,x_r\,y_k\,y_s + 2\,\Sigma\,x_k{}^2\,y_k\,y_r + 2\,\Sigma\,x_k\,x_r\,y_r{}^2 + \Sigma\,x_k\,x_r\,y_s\,y_t)\,.$$

Hier laufen alle Indizes von 1 bis n_j, es sind aber die Summanden auszulassen, in denen mit verschiedenen Buchstaben bezeichnete Indices den gleichen Wert annehmen. Bildet man jetzt den Erwartungswert, zählt wie im vorigen Paragraphen ab und führt die Abkürzungen

$$N M_{22} = \Sigma\,x_i{}^2\,y_i{}^2\,; \qquad N A = \Sigma\,x_i{}^2\,y_k{}^2\,; \qquad N B = \Sigma\,x_i\,x_k\,y_i\,y_k$$
$$N C = \Sigma\,x_i\,x_k\,y_i\,y_r\,; \qquad N D = \Sigma\,x_i\,x_k\,y_r\,y_s\,; \qquad N E = \Sigma\,x_i{}^2\,y_i\,y_k$$
$$N F = \Sigma\,x_i\,x_k\,y_k{}^2\,; \qquad N G = \Sigma\,x_i{}^2\,y_k\,y_r\,; \qquad N H = \Sigma\,x_i\,x_k\,y_r{}^2$$

ein, wo die Summen von 1 bis N zu nehmen sind, wieder mit Auslassung der Summanden, in denen mit verschiedenen Buchstaben bezeichnete Indizes gleiche Werte haben, so erhält man den Beitrag der Quadrate zum Erwartungswert, wenn man über alle j summiert:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{N^2}\Bigg[& \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j}\left\{M_{22} - \frac{2B + A + 2E + 2F}{N-1} + \frac{2\,(G + H + 4\,C)}{(N-1)\,(N-2)} - \frac{6\,D}{(N-1)\,(N-2)\,(N-3)}\right\} \\ & + \frac{m}{N-1}\left\{2\,B + A + 2\,E + 2\,F - \frac{3\,(G + H + 4\,C)}{N-2} + \frac{11\,D}{(N-2)\,(N-3)}\right\} \\ & + \frac{N}{(N-1)\,(N-2)}\left\{G + H + 4\,C - \frac{6\,D}{N-3}\right\} + \frac{D \sum\limits_{j=1}^{m} n_j{}^2}{(N-1)\,(N-2)\,(N-3)}\Bigg] \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (33).$$

Auch bei Berechnung der Erwartungswerte der doppelten Produkte wiederholen sich die Rechnungen des vorigen Paragraphen. Das doppelte Produkt des j-ten mit dem k-ten Summanden wird

$$P_{jk} = \frac{2}{n_j\,n_k}\left(\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{r=1}^{n_k} x_{ji}\,y_{ji}\,x_{kr}\,y_{kr} + \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{r \neq s}^{1\cdots n_k} x_{ji}\,y_{ji}\,x_{kr}\,y_{ks}\right.$$
$$\left. \sum_{i \neq r}^{1\cdots n_j} \sum_{s=1}^{n_k} x_{ji}\,y_{jr}\,x_{ks}\,y_{ks} + \sum_{i \neq r}^{1\cdots n_j} \sum_{s \neq t}^{1\cdots n_k} x_{ji}\,y_{jr}\,x_{ks}\,y_{kt}\right. .$$

Bildet man davon den Erwartungswert, summiert über sämtliche doppelten Produkte, läßt also j und k von 1 bis m laufen, schließt aber $n_j = n_k$ aus, so erhält man als Beitrag aller doppelten Produkte zum Erwartungswert

$$\frac{1}{N^2}\left\{\frac{2\,m\,(m-1)\,B}{N-1} + \frac{[4\,N\,(m-1) - 4\,m\,(m-1)]\,C}{(N-1)\,(N-2)} + \frac{2\,[N^2 - \sum\limits_{k=1}^{m} n_k{}^2 - 2\,N\,(m-1) + m\,(m-1)]\,D}{(N-1)\,(N-2)\,(N-3)}\right\} \qquad (34).$$

[3]) v. Mises, l. c., Seite 342, Gleichung (16).

4. Die Werte von A, B, . . lassen sich aus 8 Gleichungen berechnen, die man erhält, wenn man

$$(\Sigma x_j)^2 (\Sigma y_k)^2 = 0; \qquad (\Sigma x_j y_j)(\Sigma x_k)(\Sigma y_r) = 0$$

$$(\Sigma x_j^2)(\Sigma y_k)^2 = 0; \qquad (\Sigma x_j)^2 (\Sigma y_k^2) = 0$$

$$(\Sigma x_j^2 y_j)(\Sigma y_k) = 0; \qquad (\Sigma x_j y_j^2)(\Sigma x_k) = 0$$

$$(\Sigma x_j y_j)^2 = N^2 M_{11}^2; \qquad (\Sigma x_j^2)(\Sigma y_k^2) = N^2 M_{20} M_{02}$$

setzt, wo die Summen alle von 1 bis N zu nehmen sind. Man findet

$$A = -M_{22} + M N_{20} M_{02}; \quad B = -M_{22} + N M_{11}^2; \quad C = 2 M_{22} - N M_{11}^2; \quad E = F = -M_{22}$$

$$D = -6 M_{22} + N M_{20} M_{02} + 2 N M_{11}^2; \quad G = H = 2 M_{22} - N M_{20} M_{02}.$$

Setzt man das in (33) und (34) ein und subtrahiert davon $(\mathfrak{E}(M_{11}^s))^2$, so erhält man

$$\mathfrak{Str}(M_{11}^s) = Q / N^2 (N-1)^2 (N-2)(N-3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35),$$

wo

$$Q = M_{22}(N-1)\left\{(N^3 + N^2)\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j} + 6\sum_{j=1}^{m} n_j^2 - 2N^2 m^2 + 3N^2 m + 2N m^2 - 3Nm - 8N^2\right\}$$

$$+ M_{20} M_{02} N (N-1)\left\{-(N^2 - N)\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j} - \sum_{j=1}^{m} n_j^2 + N^2 m - 3Nm + 2m^2 - 3m + 4N\right\}$$

$$+ M_{11}^2 N \left\{-2N(N-1)^2 \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n_j} - 2(N-1)\sum_{j=1}^{m} n_j^2 + N^3 m^2 - 3N^2 m^2 - 2N^3 m + 6N^2 m\right.$$

$$\left. + 4 N m^2 + 3N^3 - 3N^2 - 2N - 6Nm - 4m^2 + 6m\right\}.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man die Länge aller Serien gleich n wählt

$$\mathfrak{Str}(M_{11}^s) = (N-n)\, Q' / n^2 N (N-1)^2 (N-2)(N-3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36),$$

wo

$$Q' = M_{22}(N-1)(-6n^2 - N^2 + 2Nn + 3N) + M_{20} M_{02} N (N-1)(Nn + n^2 - N - 4n + 3)$$

$$+ M_{11}^2 N (N^3 - N^2 n + 2 N n^2 - 5N^2 + Nn - 2n^2 + 8N + 2n - 6).$$

Für sehr umfangreiche Fabrikationsmengen kann man als Näherungswert wieder den Grenzwert von (36) für $N \to \infty$ verwenden:

$$\mathfrak{Str}(M_{11}^s) = M_{11}^2 / n^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37).$$

Die Streuung von L_{11} erhält man durch Multiplikation von (35) bis (37) mit $[(N-1):(m-1) M_{11}]^2$.

5. Zum Schluß sei noch Erwartungswert und Streuung von M_{11}^j angegeben. Der Gang der Berechnung entspricht dem oben angewendeten. Es wird

$$\mathfrak{E}(M_{11}^j) = \frac{n-1}{n}\,\frac{N}{N-1}\, M_{11} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38),$$

$$\mathfrak{Str}(M_{11}^j) = \frac{N(N-n)(n-1)\,Q}{n^3 (N-1)^2 (N-2)(N-3)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39),$$

wo

$$Q = M_{22}(N-1)(Nn - N - n - 1) + M_{20} M_{02}(N-1)(N-n-1) + M_{11}^2 \{-N^2(n-2) + N(n-4) + 2(n+1)\}$$

ist. Läßt man hier $N \to \infty$ gehen, nimmt also ein sehr umfangreiches Fabrikat an, dem eine Stichprobe entnommen ist, wird

$$\mathfrak{Str}(M_{11}^j) = \frac{(n-1)}{n^3}\{(n-1) M_{22} + M_{20} M_{02} - (n-2) M_{11}^2\}\;^{4)} \quad . \; . \; . \quad (40).$$

Die Gleichungen (12), (26), (27) und (38) bis (40) geben darüber Auskunft, wie man die Genauigkeiten von Werten zu beurteilen hat, die aus einer dem ganzen Fabrikat entnommenen Probe berechnet sind. So erlauben z. B. die letzten beiden Formeln, die Unsicherheit des Zählers des aus einer solchen Probe berechneten Korrelationskoeffizienten abzuschätzen, während man ein Maß für die Unsicherheit der beiden Faktoren des Nenners aus (26) bzw. (27) gewinnen kann. Insbesondere erlauben aber die letzten beiden Formeln die Übertragung der Überlegungen des § 2, 5 auf die Lexissche Zahl L_{11}.

[4]) v. Mises, l. c., Seite 338, Gleichung (9').

Beiträge zur graphischen Mechanik und ihren Anwendungen[1].

I. Mitteilung.

Von *R. Mehmke* in Stuttgart.

1. Einleitung. Wenn bei einem Getriebe, von welchem die Bewegung eines der Glieder bekannt ist, nicht nur für eine einzige Stellung oder für ganz wenige Stellungen, sondern für eine größere Anzahl solcher die Beschleunigungen mitgeführter Punkte zu konstruieren sind oder man einen Überblick über den Gesamtverlauf der Beschleunigungen während einer Bewegungsperiode zu erhalten wünscht, so geschieht bekanntlich die graphische Ermittlung der Beschleunigung eines Punktes aus dessen Geschwindigkeit im Falle geradliniger Bewegung mit Hilfe des Geschwindigkeit-Weg-Schaubildes („*v*-*s*-Diagramms")[2], während im Falle krummliniger ebener oder räumlicher Bewegung sich eine 1903 von mir veröffentlichte Verallgemeinerung jenes Verfahrens[3] anwenden läßt, bei welcher der „Hodograph" und die „Velozide"[4], bei der Überbeschleunigung noch eine Velozide zweiter Ordnung benützt werden, oder auch Hilfskurven, die aus den genannten dadurch entstehen, daß man beispielsweise im Fall ebener Bewegung alle Geschwindigkeiten um einen Rechten dreht[5]. Im folgenden komme ich auf dieses Verfahren zurück, um es in einigen Punkten aufzuklären[6] und zu ergänzen, letzteres u. a. durch Ausdehnung auf sphärische Kinematik und auch nichteuklidische im Raum. Ferner zeige ich, abgesehen von Beispielen aus der Praxis, Anwendungen auf die darstellend-geometrische Lösung von (auch für die Technik nicht unwichtigen) Aufgaben über Raumkurven, die in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie entweder gar nicht, oder nicht befriedigend gelöst zu werden pflegen. Bei den in Rede stehenden Konstruktionen ist vorausgesetzt (wie das in der darstellenden Geometrie und im technischen Zeichnen überhaupt immer verlangt werden muß), man könne bei einer gezeichnet vorliegenden Kurve in jedem Punkt schnell und hinreichend genau die Tangente finden. In einem Anhang zu dieser ersten Mitteilung beweise ich einfache Sätze über Beschleunigungen bei beliebig-veränderlichen geraden Punktreihen, die noch nicht bekannt zu sein scheinen. In einer zweiten Mitteilung denke ich auf die noch wenig entwickelten Zweige der Kinematik einzugehen, in denen Geraden oder Ebenen als bewegte Elemente betrachtet werden.

2. Beschleunigung eines Punkts bei unebener Bahn. Bezeichnet im Sinne von Möbius x einen sich bewegenden Punkt mit der konstanten Masse eins[7], so ist bekanntlich $\dot{x} = dx/dt$ die Geschwindigkeit, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ die (gewöhnliche) Beschleunigung[8], $\dddot{x} = d^3x/dt^3$ die Überbeschleunigung (Beschleunigung 2. Ordnung oder Geschwindigkeit 3. Ordnung), jedesmal nach Länge und Richtung, als Vektor[9]. Das in Rede stehende Verfahren, soweit es die Beschleunigung allein betrifft — nicht auch die Überbeschleunigung —, beruht in seiner ursprünglichen Form darauf, daß, wenn man den „Geschwindigkeitsvektor" $\dot{x}$ von x an diesen Punkt selbst anträgt, sein Endpunkt x_{I} eine, von Reuleaux Velozide genannte Kurve beschreibt, deren Tangente in x_{I} durch den Anfangspunkt $x_{-\mathrm{II}}$ des rückwärts an x angetragenen „Beschleunigungsvektors" geht, während letzterer ja überdies parallel zur Tangente des Möbius-

[1] Auskunft über die neuere Entwicklung der graphischen Kinematik und Kinetostatik bis zur Gegenwart gibt K. Federhofers wertvolle Darstellung in „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, herausgegeben von der Schriftleitung des Zentralblatts für Mathematik", I 2, Berlin 1932.

[2] Die betreffende Konstruktion — Ordinate der „Beschleunigungskurve" gleich Subnormale der „Geschwindigkeitskurve" — geht wohl auf R. Pröll zurück: „Über die Beschleunigung in einer Pleuelstange . . .", Zeitschr. Civilingenieur, Neue Folge Bd. 18 (1872), Spalte 119, dazu Taf. 8 Fig. 11. In der 17. Auflage des Taschenbuchs der Hütte (1899) ist allerdings auf S. 524 der fragliche Satz „Bour-Pröllscher Satz" genannt worden, aber in dem Werk von Edm. Bour, um das es sich handelt (Cours de mécanique et machines, 1er fasc., Cinématique, 1865), ist wohl auf S. 35 unter IV eine Formel angegeben, aus der man die Konstruktion herauslesen kann — für $v = \psi(s)$ wird j (Beschleunigung) $= \psi(s) \cdot \psi'(s)$ —, ohne daß jedoch Bour dieses Ergebnis in Worte gefaßt hätte oder in einer der zahlreichen Figuren die Übersetzung jener Formel in eine Konstruktion zu bemerken wäre.

[3] „Zur graphischen Kinematik und Dynamik", Jahresber. Deutsch. Mathematiker-Vereinigung, Bd. XII (1903), S. 561 bis 562.

[4] In meiner Veröffentlichung von 1903 nannte ich die Kurve, die bei Reuleaux Velozide heißt — Ort des Endpunkts des an den bewegten Punkt angetragenen Geschwindigkeitsvektors dieses Punkts —, den lokalen Hodographen, den Möbius-Hamiltonschen Hodographen dagegen den polaren.

[5] Die betreffende unmittelbare Ausdehnung des Pröllschen Satzes auf krummlinige ebene Bewegung hatte ich schon 1902 in der Z. Math. Physik, Bd. 47 S. 267, angegeben.

[6] Eine gewisse Aufklärung ist nötig geworden durch Bemerkungen von Herrn Federhofer in seiner unter Anm. 1 angeführten Schrift.

[7] Wie Emil Müller und seine Schüler bezeichne ich Punkte mit kleinen lateinischen, Geraden mit großen lateinischen Buchstaben, ferner die Bahn eines zwangläufig bewegten Punktes x mit (x).

[8] Ich erinnere daran, daß G. Jaumann in seinen „Grundlagen der Bewegungslehre", Leipzig 1905, Beschleunung statt Beschleunigung sagt (auch Geschwindheit statt Geschwindigkeit). In Grimms Wörterbuch, I. ist „beschleunen" als gleichbedeutend mit „beschleunigen" aufgeführt und eine Stelle bei Goethe angegeben, wo sich ersteres Wort findet. Statt Geschwindigkeit (als benannte Zahl, „Skalar") scheint sich das von Reuleaux gebrauchte Wort „Schnelle" einbürgern zu wollen, während das noch kürzere, ebenfalls von Reuleaux vorgeschlagene, der Sprache der Seeleute entlehnte „Fahrt" bei den Mathematikern und Ingenieuren keinen Anklang gefunden zu haben scheint.

[9] Kurze Benennungen für diese Vektoren schlage ich unter Nr. 3 vor

Hamiltonschen Hodographen in dem x entsprechenden Punkt sein muß und somit $x_{-\mathrm{II}}$ durch Ziehen von zwei Geraden erhalten wird. (Das vor dem Index stehende minus-Zeichen soll hier wie in späteren Fällen andeuten, daß der betreffende Vektor rückwärts an den führenden Punkt angetragen worden ist.) Wegen einiger Abarten dieser Konstruktion s. Nr. **3** und Nr. **4**.

Ist nun die Bahn von x eine durch zwei Risse, z. B. Grundriß und Aufriß oder auch in axonometrischer Darstellung gegebene Raumkurve, so braucht man höchstens in einem Riß beide Hilfskurven (den Hodographen und die Velozide) zu konstruieren, während, wenn man auf Proben verzichtet, in jedem andern Riß schon eine von beiden Hilfskurven genügt. (Hierauf hinzuweisen, habe ich früher versäumt.) Denn ist z. B. (s. Abb. 1) die Bahn von x axonometrisch durch Bild und Grundrißbild dargestellt und $\dot{x}$ etwa im Grundrißbild mit Hilfe des Grundrißbildes von Hodograph und Velozide gefunden worden, so liefert die „Ordnungslinie" (Lotrechte) durch das Grundrißbild $x'_{-\mathrm{II}}$ von $x_{-\mathrm{II}}$ einen geometrischen Ort für das Bild dieses Punktes, das vollends durch Schneiden jener Ordnungslinie mit der im Bild von x_{I} an das Bild der Velozide gezogenen Tangente erhalten wird. Ähnlich ist es bei jeder andern Darstellung durch zwei Parallelprojektionen. Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen in der graphischen Dynamik starrer Körper müssen wir auch an den Fall denken, daß die Bewegung in einem Raum von mehr als drei, etwa n Dimensionen vor sich geht, also $(n-1)$ Risse gebraucht werden: Offenbar genügt es auch dann wieder, sich in einem der Risse beide Hilfskurven zu verschaffen, während man in den übrigen Rissen mit je einer Hilfskurve auskommt. Wenn, etwa zur Lösung von Aufgaben der darstellenden Geometrie krummer Linien und Flächen, die Größe der Geschwindigkeit von x für jeden Zeitpunkt beliebig gewählt werden darf, genügt sogar in jedem Riß eine einzige Hilfskurve, denn man braucht nur z. B. im Grundriß (oder bei axonometrischer Darstellung im Grundrißbild) als Bahn von x_{I} eine sog. Äquitangentiale der Bahn von x, also die Länge des betreffenden Risses von $\dot{x}$ konstant zu wählen. In der Tat fällt alsdann in dem fraglichen Riß der Punkt $x_{-\mathrm{II}}$ in die Normale der Bahn von x, welche Gerade jetzt einen geometrischen Ort für den in Rede stehenden Punkt abgibt und mithin den Hodographen entbehrlich macht. (Wegen anderer, die Konstruktionen vereinfachenden Annahmen s. Nr. 9.) Man bemerke auch noch folgendes: Da der Beschleunigungsvektor eines Punkts in die Schmiegungsebene seiner Bahn fällt, so ist die Verbindungsebene der Punkte x, x_{I} und $x_{-\mathrm{II}}$ die Schmiegungsebene der Bahn von x in diesem Punkt. Wäre also diese Ebene schon auf andere Weise bestimmt worden, so erhielte man bei der Darstellung durch Grundriß und Aufriß z. B., wenn man $x_{-\mathrm{II}}$ etwa im Grundriß mittels Hodograph und Velozide gefunden hätte, den Aufriß von $x_{-\mathrm{II}}$ schon als Schnittpunkt der Schmiegungsebene mit der Lotrechten durch den Grundriß von $x_{-\mathrm{II}}$, es bliebe also im Aufriß überhaupt keine Hilfskurve mehr zu benützen. Damit soll nicht gesagt sein, daß es nicht zweckmäßig wäre, der möglichen Proben wegen mehr Hilfskurven zu verwenden, als an sich nötig ist, besonders wenn sie leicht zu konstruieren sind.

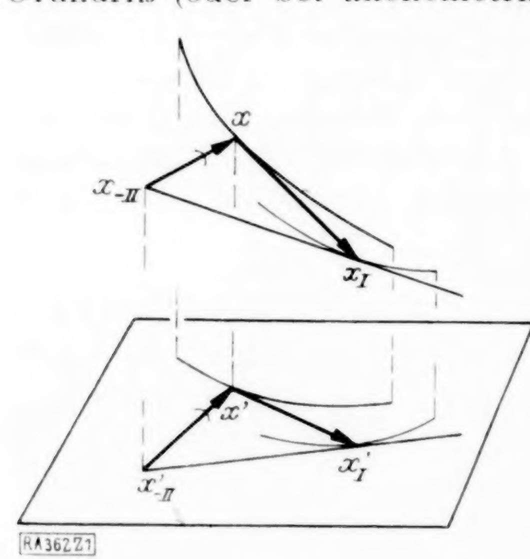


Abb. 1.

3. Fortsetzung: Abarten der Konstruktion mit Hodograph und Velozide. Versuchsweise werde ich im folgenden statt „Geschwindigkeitsvektor" sagen die *Hast*[10]), statt „Beschleunigungsvektor" die *Zweithast*, statt „Überbeschleunigungsvektor" die *Dritthast*. Ferner möge x_{I}, also der Endpunkt der an x nach Länge und Richtung angetragenen Hast $\dot{x}$, der zu x gehörige *Hastpunkt*[11]), und die Bahn von x_{I} die *Hastkurve* heißen. Die Konstruktion des Hodographen kann auf die folgende Art entbehrlich gemacht werden. Man trage die Hast $\dot{x}$ von x aus nicht nur vorwärts ab, sondern zugleich auch rückwärts; der im letzteren Fall sich ergebende Anfangspunkt sei mit $x_{-\mathrm{I}}$ bezeichnet und werde der zu x gehörige *Rückhastpunkt*, seine Bahn die *Rückhastkurve* genannt. Weil nach Graßmann statt einer Differenz $(p-q)$ zweier Punkte p und q von der Masse eins der Vektor von q nach p gesetzt werden kann: $p-q=\overrightarrow{qp}$, woraus, da $-\overrightarrow{qp}=\overrightarrow{pq}$ ist, $q=p+\overrightarrow{pq}$ folgt, so können wir schreiben

$$x_{\mathrm{I}}=x+\dot{x}, \quad x_{-\mathrm{I}}=x-\dot{x}$$

oder auch

$$\dot{x}=x_{\mathrm{I}}-x=x-x_{-\mathrm{I}}.$$

[10]) In englischen Abhandlungen wird (zum Unterschied von velocity) „speed" für Geschwindigkeitsvektor gebraucht. Es ist nicht einzusehen, warum im Deutschen kein ebenso kurzes Fachwort angängig sein soll.

[11]) Dieser Punkt wurde von Johannes Petersen (Grundpriciper for de infinitesimale Descriptivgeometrie, Kjøbenhavn 1897) der Fluxionspunkt von x genannt, von R. v. Mises (Zur konstruierenden Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven, Z. Math. Phys., Bd. 52, 1905, S. 46) die Charakteristik des Punktes x.

Durch Ableitung nach der Zeit ergibt sich hieraus

$$\ddot{x} = \dot{x}_{\mathrm{I}} - \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_{-\mathrm{I}}$$

und wegen

$$\ddot{x} = x - x_{-\mathrm{II}} \text{ oder } x_{-\mathrm{II}} = x - \ddot{x}$$

schließlich

$$x_{-\mathrm{II}} = x + \dot{x} - \dot{x}_{\mathrm{I}} = x_{\mathrm{I}} - \dot{x}_{\mathrm{I}},$$

sowie

$$x_{-\mathrm{II}} = x - \dot{x} + \dot{x}_{-\mathrm{I}} = x_{-\mathrm{I}} + \dot{x}_{-\mathrm{I}}.$$

Hiernach ist $x_{-\mathrm{II}}$ sowohl der Anfangspunkt der rückwärts an x_{I} angetragenen Hast $\dot{x}_{\mathrm{I}}$ von x_{I}, wie auch der Endpunkt der an $x_{-\mathrm{I}}$ angetragenen Hast $\dot{x}_{-\mathrm{I}}$ von $x_{-\mathrm{I}}$. Weil aber die Hast eines Punkts immer in die Tangente seiner Bahn fällt, so muß der gesuchte Punkt $x_{-\mathrm{II}}$ der Schnittpunkt der Tangenten sein, die man (Abb. 2) im Hastpunkt x_{I} an die Hastkurve und im Rückhastpunkt $x_{-\mathrm{I}}$ an die Rückhastkurve ziehen kann[12]). Dies ist wohl die bequemste Konstruktion für die Zweithast. Sie hat außerdem den Vorzug, auf die sphärische Kinematik und nichteuklidische im Raum übertragbar zu sein, während es auf der Kugel und in der nicht euklidischen Geometrie ja keine Vektoren und keine Parallelverschiebung von solchen, also auch keinen Hodographen gibt (s. Nr. 11 und 12).

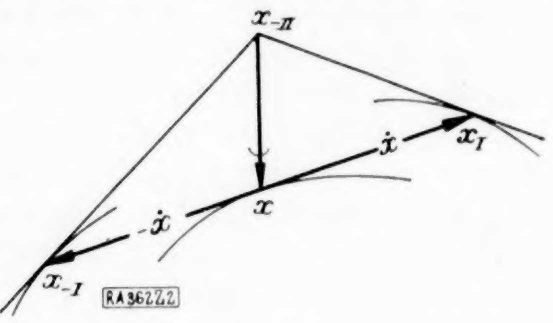


Abb. 2.

4. Zweite Fortsetzung: Änderung des Maßstabs. Anwendung affiner Umbildungen. Nur selten kann man bei der graphisch-kinematischen Untersuchung von Getrieben die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im wahren Maßstab der Zeichnung auftragen. Erwünscht ist es aber, die Konstruktionen, die uns im vorhergehenden beschäftigt haben, dann beibehalten zu können. Untersuchen wir die Möglichkeit hiervon und fragen wir uns, in welchem Maßstab die Beschleunigungen erhalten werden, wenn man die Geschwindigkeiten im Maßstab $1:\lambda$ aufgetragen hat. An die Stelle der früheren Doppelgleichung

$$\dot{x} = x_{\mathrm{I}} - x = x - x_{-\mathrm{I}}$$

tritt nun

$$\dot{x} = \lambda\,(x_{\mathrm{I}} - x) = \lambda\,(x - x_{-\mathrm{I}}),$$

woraus durch Ableitung nach der Zeit folgt:

$$\ddot{x} = \lambda\,\dot{x}_{\mathrm{I}} - \lambda\,\dot{x} = \lambda\,\dot{x} - \lambda\,\dot{x}_{-\mathrm{I}}$$

und weiter durch Entfernen von $\dot{x}$:

$$\ddot{x} = \lambda^2\,x - (\lambda^2\,x_{\mathrm{I}} - \lambda\,\dot{x}_{\mathrm{I}}) = \lambda^2\,x - (\lambda^2\,x_{-\mathrm{I}} + \lambda\,\dot{x}_{-\mathrm{I}}).$$

Es ist also

$$\lambda^2\,x_{\mathrm{I}} - \lambda\,\dot{x}_{\mathrm{I}} = \lambda^2\,x_{-\mathrm{I}} + \lambda\,\dot{x}_{-\mathrm{I}}.$$

Setzt man diesen Punkt, welcher augenscheinlich im Schnittpunkt der an die Bahnen von x_{I} und $x_{-\mathrm{I}}$ gezogenen Tangenten liegt und die Masse λ^2 hat, gleich $\lambda^2\,x_{-\mathrm{II}}$, so kommt

$$\ddot{x} = \lambda^2\,(x - x_{-\mathrm{II}}) = \lambda^2\,\overrightarrow{x_{-\mathrm{II}}\,x}.$$

Die frühere Konstruktion behält also ihre Gültigkeit und es ergeben sich die Beschleunigungen im Maßstab $1:\lambda^2$. Dieses Ergebnis, das zu erwarten war und mit den Dimensionen von Geschwindigkeit und Beschleunigung — $l\,t^{-1}$ und $l\,t^{-2}$ — im Einklang steht, ist leicht auf den Fall auszudehnen, daß, wieder unter möglichster Beibehaltung der früheren Konstruktionen, die Hast von x mit allen sonstigen Vektoren irgendeiner konstanten affinen Transformation, deren Zeichen $\mathfrak{A}$ sei, unterworfen werden. Man braucht nur in den vorhergehenden Gleichungen $\mathfrak{A}$ an die Stelle von $1:\lambda$ zu setzen, was ergibt:

$$x_{\mathrm{I}} = x + \mathfrak{A}\,\dot{x}, \quad x_{-\mathrm{I}} = x - \mathfrak{A}\,\dot{x}, \; x - x_{-\mathrm{II}} = \mathfrak{A}^2\,\ddot{x},$$

oder, vorausgesetzt, daß die affine Transformation $\mathfrak{A}$ nicht ausgeartet ist, sich also umkehren läßt:

$$\ddot{x} = \mathfrak{A}^{-2}\,(x - x_{-\mathrm{II}}) = \mathfrak{A}^{-2}\,\overrightarrow{x_{-\mathrm{II}}\,x}.$$

Wie die letzte Gleichung besagt, muß man, falls unter Benützung der affin transformierten Geschwindigkeiten die frühere Konstruktion ausgeführt wird, den sich ergebenden Vektor $\overrightarrow{x_{-\mathrm{II}}\,x}$ zweimal der umgekehrten affinen Transformation unterwerfen, um $\ddot{x}$ zu erhalten. Be-

[12]) Im Anschluß an W. Hartmann, Die Maschinengetriebe, I, 1913, kann man in der Zeichnung Beschleunigungsvektoren zur Unterscheidung von Geschwindigkeitsvektoren durch Pfeile mit Widerhaken kenntlich machen.

kanntlich wendet man bei Bewegungen in der Ebene gern die um einen Rechten gedrehten Geschwindigkeiten an. Dieser Fall ist in dem vorhergehenden enthalten, weil die Drehung aller Vektoren der Ebene um einen Rechten als eine affine Umbildung der Vektorebene sich betrachten läßt. Zweimalige Drehung wie auch zweimalige Rückwärtsdrehung um einen Rechten bedeutet aber die Umkehrung aller Richtungen. (Analytisch $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}^{-2} = -1$.) Es wird also jetzt, wenn man die früheren Konstruktionen beibehält, $x_{-\mathrm{II}}$ der Endpunkt der **vorwärts** an x angetragenen Zweithast, welchen Punkt man übrigens besser mit x_{II} statt $x_{-\mathrm{II}}$ bezeichnen wird. Statt um einen Rechten, könnte man auch die Hast eines jeden Punktes um irgendeinen andern konstanten Winkel, etwa φ, drehen; $\mathfrak{A}^{-2}$ würde dann die Rückwärtsdrehung um den Winkel 2φ bedeuten. An Benennungen kämen hier Drehhast, Rückdrehhast usw. in Frage.

5. Hast eines Vektors. Die vorgeschlagene Benennung Hast für den Geschwindigkeitsvektor eines Punkts, also nach unserer Auffassung für die Ableitung des Punkts nach der Zeit, läßt sich auch bei andern geometrischen Größen, die Funktionen der Zeit sind, anwenden, insbesondere bei Vektoren, was im folgenden geschehen soll. Bezeichnet also $\boldsymbol{u}$ einen veränderlichen Vektor, der eine Funktion der Zeit ist, so möge der Vektor $\dot{\boldsymbol{u}} = d\boldsymbol{u}/dt$ die *Hast von* $\boldsymbol{u}$ heißen[13]). Wir wollen uns die Aufgabe stellen, $\dot{\boldsymbol{u}}$ in dem Falle zu konstruieren, daß der Anfangspunkt x von $\boldsymbol{u}$ eine bekannte Bewegung ausführt, also der zugehörige Hastpunkt x_{I} und der Rückhastpunkt $x_{-\mathrm{I}}$ benützt werden können. Es ist dies eine Verallgemeinerung der unter Nr. **2** bis **4** behandelten Aufgabe, denn wird für $\boldsymbol{u}$ die Hast $\dot{x}$ von x genommen: $\boldsymbol{u} = \dot{x}$, so geht $\dot{\boldsymbol{u}}$ wegen $\dot{\boldsymbol{u}} = d\dot{x}/dt = \ddot{x}$ in die Zweithast von x über. Der Endpunkt des an x angetragenen Vektors $\boldsymbol{u}$ heiße x_u und es liege die Bahn dieses Punktes gezeichnet vor. Man könnte $\boldsymbol{u}$ noch mit seinem Anfangspunkt an einen ruhenden Punkt[14]) heften, also eine Art von Hodographen konstruieren, dessen Tangente offenbar die Richtung von $\dot{\boldsymbol{u}}$ ergäbe, es empfiehlt sich aber, $\boldsymbol{u}$ zugleich rückwärts an x anzutragen und auch die Bahn des neuen Anfangspunktes — er heiße x_{-u} — zu zeichnen. Man hat nun die Doppelgleichung

$$\boldsymbol{u} = x_u - x = x - x_{-u}\,,$$

aus der sich durch Ableitung nach der Zeit

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{x}_u - \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_{-u}$$

ergibt. Leicht ist folgende Konstruktion als richtig zu erkennen: Zieht man (Abb. 3a) durch den Punkt x_{I} die Parallele zur Tangente der Bahn von x_u, durch den Punkt $x_{-\mathrm{I}}$ die Parallele zur Tangente der Bahn von x_{-u} und schneiden sich beide Geraden in x_{-2}, dann ist $\overrightarrow{x_{-2}\,x}$ gleich dem gesuchten Vektor $\dot{\boldsymbol{u}}$. In dem Dreieck $x_{-2}\,x\,x_{\mathrm{I}}$ erscheint nämlich $\overrightarrow{x_{-2}\,x}$ in zwei Komponenten zerlegt, von denen die eine gleich $-\dot{x}$, die andere parallel $\dot{x}_u$ ist, in dem Dreieck $x_{-2}\,x\,x_{-\mathrm{I}}$ dagegen in eine Komponente gleich $\dot{x}$ und eine zweite, zu $\dot{x}_{-u}$ parallele Komponente, wie es die letzte Doppelgleichung verlangt. Nebenbei sieht man, daß $\overrightarrow{x_{-2}\,x_{\mathrm{I}}}$ gleich der Hast von x_u, $\overrightarrow{x_{-2}\,x_{-\mathrm{I}}}$ gleich derjenigen von x_{-u} ist. An Stelle des Punktes x_{-2} oder zusammen mit ihm könnte auch (Abb. 3b) der Endpunkt x_2 des an x angetragenen Vektors $\dot{u}$ konstruiert werden.

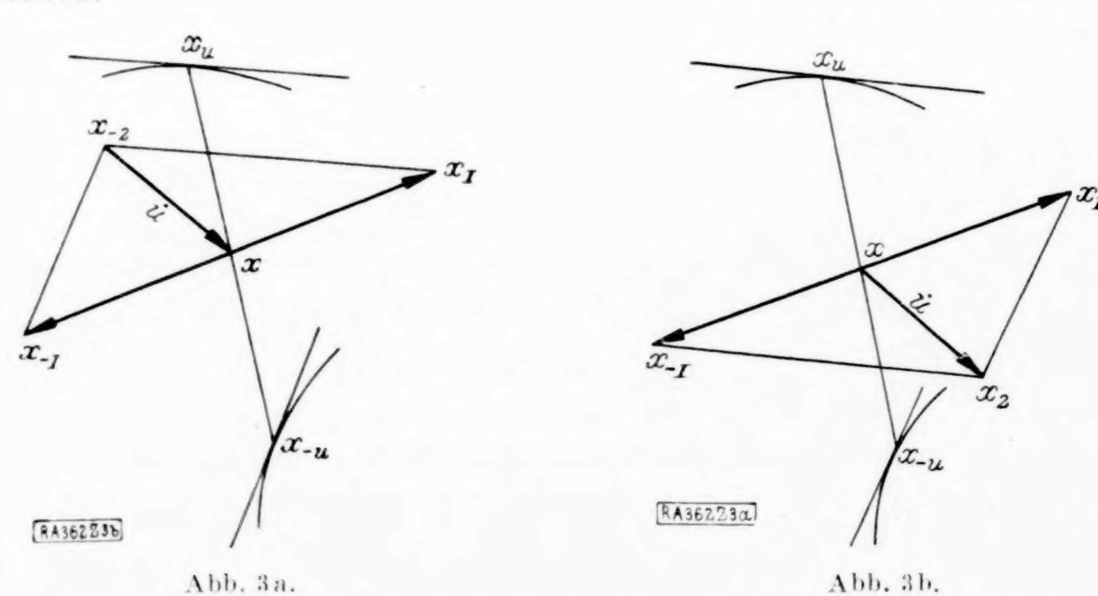


Abb. 3a. Abb. 3b.

[13]) Resal spricht in seinem Traité de cinématique pure, Paris 1862, von geometrischer Ableitung, z. B. ist nach ihm der Beschleunigungsvektor die geometrische Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit. Bei Zahlgrößen hat J. Petersen in der unter 11) genannten Schrift wie Newton schon „Fluxion" für die Ableitung nach der Zeit verwendet, während A. F. Möbius in seiner „Mechanik des Himmels" 1843, S. 18 = Werke IV, S. 32, auch in diesem Falle von Geschwindigkeit sprach (daneben allerdings auch von Fluxion).

[14]) Einen derartigen Punkt, an den z. B. Beschleunigungsvektoren angetragen werden sollen, nannte W. Hartmann in seinem unter Anm. 13 angeführten Buche (S. 321) einen Strahlungspunkt, weil das Wort Pol in der Kinematik schon in anderer Bedeutung — Geschwindigkeitspol, Beschleunigungspol usw. — gebraucht wird.

Wäre u dauernd gleich $\dot{x}$, so fiele x_u mit x_I, x_{-u} mit x_{-I} zusammen und man erhielte wieder die Konstruktion der Nr. **3** für $\ddot{x}$. Es könnte aber zur Konstruktion von $\ddot{x}$ aus $\dot{x}$ auch statt des Punktes x irgendein anderer (nicht ruhender) Punkt als Führungspunkt genommen werden, was bei zweckmäßiger Wahl dieses Punktes besondere Vorteile bringen kann (s. Nr. **6** und **7**).

B. Anwendungen.

6. Räumliche Punkt-Geraden-Führung. K. Federhofer hat, zum Teil mit meiner Konstruktion von 1903, die graphische Kinematik der „räumlich schwingenden Kurbelschleife" behandelt[15]). Bei dieser wird ein Endpunkt a einer, zur Vereinfachung als starre Gerade angesehenen Stange auf einem Kreise geführt und es gleitet außerdem die Stange durch eine, um einen (nicht in der Ebene des Kreises liegenden) festen Punkt o drehbaren Hülse. Die Voraussetzungen etwas verallgemeinernd wollen wir annehmen, der Punkt a werde gezwungen, auf irgendeiner (ebenen oder räumlichen) Kurve (a) zu bleiben. Zunächst haben wir die Aufgabe zu lösen, wenn die augenblickliche, in die Tangente von (a) fallende Hast $\dot{a}$ von a gegeben ist, für irgendeinen andern, mit a starr verbundenen Punkt x der Geraden $[a\,o]$ die Hast $\dot{x}$ zu konstruieren. Wie sich zeigen wird, ist es zur Bestimmung der Zweithast $\ddot{x}$ von x vorteilhaft, die Hast $\dot{x}$ nicht an x unmittelbar vorwärts und rückwärts anzutragen, sondern einen gewissen andern Punkt als Führungspunkt zu nehmen, um alsdann die Konstruktion in Nr. **5** anzuwenden. Wie bisher, habe man (Abb. 4) die Hast von a vorwärts an diesen Punkt angetragen. Ihren Endpunkt a_I wählen wir als Führungspunkt. Trägt man die Hasten der verschiedenen mit a starr verbunden gedachten Punkte der sich durch o schiebenden Geraden, von welchen Punkten also x einen beliebigen bezeichnen soll, rückwärts an a_I an, so müssen deren Anfangspunkte nach bekannten Sätzen eine gerade Punktreihe bilden, die geometrisch ähnlich der Reihe der bewegten Punkte ist und außerdem in der durch a gehenden, zur Geraden $a\,o$ senkrechten Ebene liegt. Der Träger jener Punktreihe läßt sich finden, weil der augenblicklich mit o zusammenfallende Punkt b der bewegten Geraden eine in die Gerade fallende Hast besitzt, also der Anfangspunkt $\bar{b}$ der rückwärts an a_I angetragenen Hast von b der Schnittpunkt der durch a_I gezogenen Parallelen zur Geraden $[a\,o]$ mit jener Ebene ist. Der Schnittpunkt x_{-u} der durch x gezogenen Parallelen zur Verbindungslinie $[b\,\bar{b}]$ mit der Geraden $[a\,\bar{b}]$ ist also der Anfangspunkt der rückwärts an den Führungspunkt a_I angetragenen Hast von x. Nimmt man diese, also den Vektor $\overrightarrow{x_{-u}\,a_I}$ für den in Nr. 5 mit u bezeichneten Vektor und konstruiert nach Nr. 5 die Hast $\dot{u}$ von u, so ist sie gleich der gesuchten Zweithast $\ddot{x}$ von x.

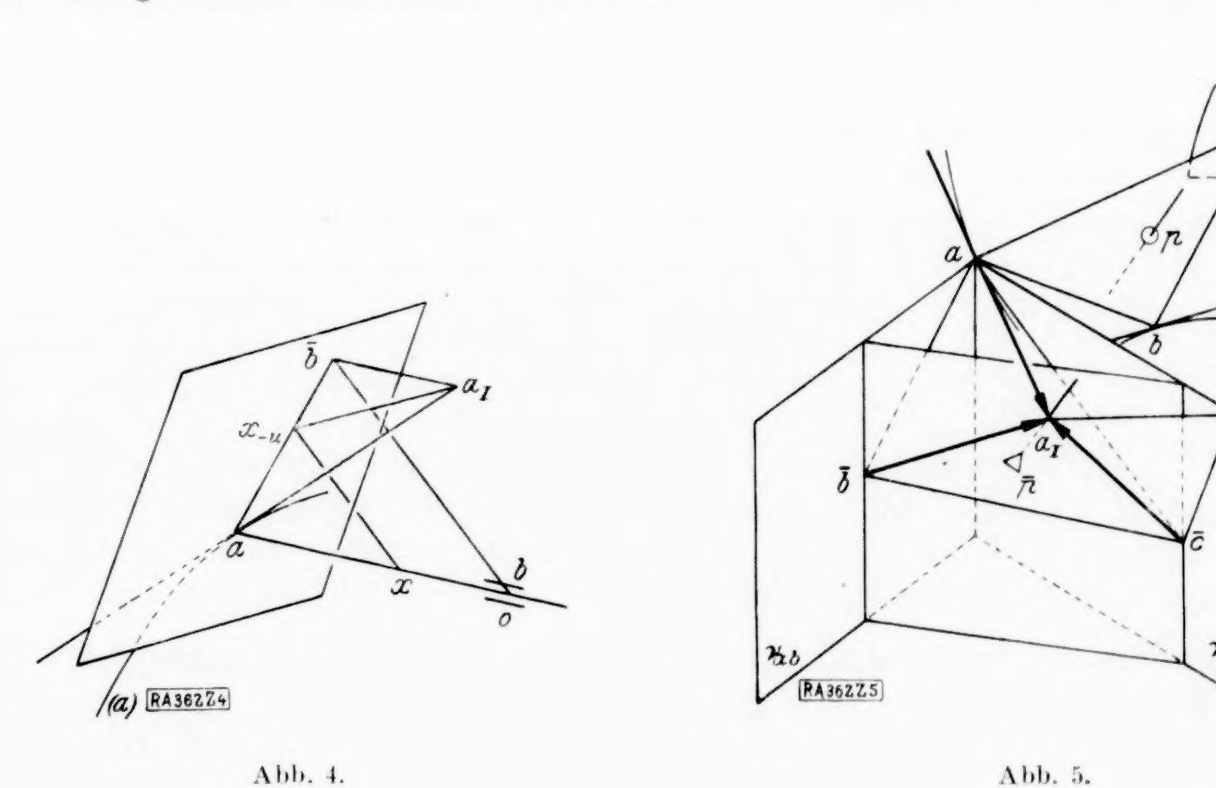


Abb. 4. Abb. 5.

7. Räumliche Dreipunkt-Führung. Eine solche, wieder als zwangläufig vorausgesetzte Bewegung allgemeinster Art liegt vor, wenn zwei Ecken a und b eines starren Dreiecks auf gegebenen Kurven geführt werden und die dritte Ecke c gezwungen wird, auf einer gegebenen Fläche Φ zu bleiben. Die zu lösende Aufgabe ist alsdann, wenn für irgendeinen Zeitpunkt außer der Lage des Dreiecks die Hast von a, die Tangente der Bahn von b und die Normale N_c der Fläche Φ im Punkte c gegeben sind, die Hast von b und c, vielleicht auch die Hast

[15]) Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. Abt. IIa, Bd. 138 (1929), S. 27 bis 34.

irgendeines mit dem Dreieck starr verbundenen Punktes x, und noch die Bestimmungsstücke der zur augenblicklichen Bewegung des Dreiecks gehörigen Schraubung zu finden. Als Führungspunkt wird zweckmäßig wieder der Hastpunkt a_{I} von a genommen, aus einem Grunde, der sich nachher zeigen wird. Wiederholt machen wir von dem bekannten, in der vorigen Nummer schon benützten Satz Gebrauch, daß die senkrechten Projektionen der Hasten zweier starr verbundenen Punkte auf die Verbindungslinie dieser Punkte nach Länge und Richtung gleich sind, wonach, wenn jene Hasten von irgendeinem Punkt vorwärts oder rückwärts abgetragen werden, die neuen Endpunkte bzw. Anfangspunkte in einer zur genannten Verbindungslinie senkrechten Ebene liegen müssen. Weil a und b starr verbunden sind, muß der Anfangspunkt $\bar{b}$ der (noch nicht bekannten) rückwärts an a_{I} angetragenen Hast $\dot{b}$ von b in der durch a senkrecht zur Geraden $[a\,b]$ gelegten Ebene $\nu_{a\,b}$ sich befinden. Weil überdies $\dot{b}$ parallel zu der als bekannt vorausgesetzten Tangente der Bahn (b) von b ist, so erhält man (Abb. 5) $\bar{b}$ als Schnittpunkt der durch a_{I} gezogenen Parallelen zur fraglichen Tangente mit der Ebene $\nu_{a\,b}$. Der Anfangspunkt der ebenfalls an a_{I} rückwärts angetragenen, aber noch zu bestimmenden Hast $\dot{c}$ von c heiße $\bar{c}$. Weil c mit a sowohl wie mit b starr verbunden ist, muß $\bar{c}$ in der Ebene $\nu_{a\,c}$ durch a senkrecht zur Geraden $[a\,c]$ und auch in der Ebene durch den schon gefundenen Punkt $\bar{b}$ senkrecht zur Geraden $[b\,c]$ liegen. Da die Hast von c parallel zur Tangentenebene der Fläche Φ im Punkte c sein muß, besteht ein weiterer geometrischer Ort für $\bar{c}$ in der Ebene durch a_{I} senkrecht zu der, auch als bekannt angesehenen Normale N_c von Φ. Somit ergibt sich $\bar{c}$ als Schnittpunkt von drei, leicht konstruierbaren Ebenen. (Selbstverständlich bedarf man zur Lösung all dieser einfachen Aufgaben der darstellenden Geometrie nicht etwa der Spuren der vorkommenden Ebenen.) Ist ferner x ein mit dem Dreieck $a\,b\,c$ verbundener Punkt (innerhalb oder außerhalb der Ebene des Dreiecks) und denkt man sich auch dessen Hast rückwärts an a_{I} angetragen, so muß ihr Anfangspunkt $\bar{x}$ nach einem ebenfalls bekannten Satz mit $a\,\bar{b}\,\bar{c}$ zusammen ein Tetraeder bilden, das affin zum Tetraeder $a\,b\,c\,x$ ist. (Hätten diese beiden Tetraeder nicht infolge der Wahl von a_{I} zum Führungspunkt eine gemeinsame Ecke, so brauchte man zur Konstruktion von $\bar{x}$ mittels proportional geteilter Strecken mehr Linien als so. Ähnlich ist es bei der jetzt folgenden Konstruktion der momentanen Schraubenachse.) Die Lage der Achse der zur augenblicklichen Bewegung des Dreiecks $a\,b\,c$ gehörigen Schraubung endlich findet man am einfachsten durch folgende Konstruktion[16]). Man fällt von a_{I} das Lot auf die Ebene $[a\,\bar{b}\,\bar{c}]$ — sein Fußpunkt heiße $\bar{p}$ — und bestimmt in der Ebene $[a\,b\,c]$ den Punkt p so, daß die Vierecke $a\,b\,c\,p$ und $a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{p}$ affin sind. Dann ist p ein Punkt der bekanntlich zu $\bar{p}\,a_{\mathrm{I}}$ parallelen Schraubenachse („Polarachse", „Zentralachse"). Wie man ebenfalls weiß, gibt der Vektor von $\bar{p}$ nach a_{I} den Schubanteil (die „Gleitgeschwindigkeit") u der augenblicklichen Schraubung, während die augenblickliche Drehschnelle ω gleich einem jeden der Verhältnisse ist, in welchem die Strecken $\bar{p}\,a$, $\bar{p}\,\bar{b}$, $\bar{p}\,\bar{c}$ zu den ihnen entsprechenden Strecken $p\,a$, $p\,b$, $p\,c$ stehen.

8. Überbeschleunigung. Eine mögliche Konstruktion des Überbeschleunigungsvektors oder der Dritthast eines Punktes ergibt sich aus derjenigen für die Hast eines Vektors $\boldsymbol{u}$ nach Nr. **5**, wenn man $\boldsymbol{u}$ gleich der Zweithast $\ddot{x}$ nimmt. Als bekannt werden also dabei angesehen außer der Bahn des Führungspunktes x noch die Bahnen von x_{I}, $x_{-\mathrm{I}}$, x_{II} und $x_{-\mathrm{II}}$, und die Konstruktion besteht darin, daß man, wenn etwa der Endpunkt x_{III} der vorwärts an x angetragenen Dritthast verlangt ist (Abb. 6), durch x_{I} die Parallele zur Tangente der Bahn von $x_{-\mathrm{II}}$, durch $x_{-\mathrm{I}}$ die Parallele zur Tangente der Bahn von x_{II} zieht und beide Geraden zum Schnitt bringt[17]). Auf entsprechende Weise läßt sich offenbar die Hast $(n+1)$-ter Ordnung $\overset{(n+1)}{x}$ aus denjenigen erster Ordnung und n-ter Ordnung finden, d. h., wenn die Bahnen der Punkte x_{I}, $x_{-\mathrm{I}}$, x_N und x_{-N} bekannt sind[18]).

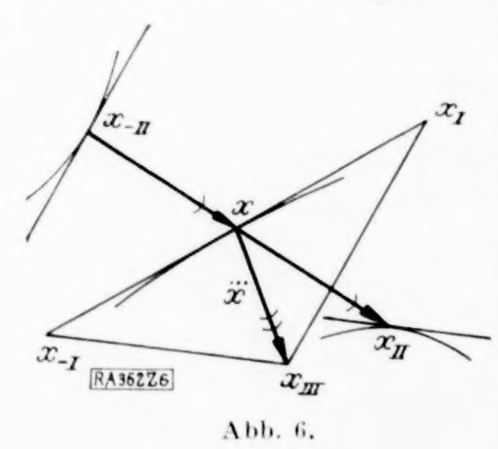


Abb. 6.

[16]) Es ist die Anwendung der von mir 1883 in der Zeitschr. Civilingenieur, Bd. 29, Spalte 207 bis 208 mitgeteilten und in der Z. Math. Phys., Bd. 44 (1899), S. 176 wiederholten Konstruktion auf den vorliegenden Fall.

[17]) Bei der Konstruktion, die ich früher angegeben habe (Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 16, 1907, S 382), werden der Hodograph, die Velozide (s. Anm. 4), der Hodograph zweiter Ordnung (Bahn des Endpunkts des an einen festen Punkt angetragenen Beschleunigungsvektors) und eine Velozide zweiter Ordnung, nämlich die Bahn des hier mit $x_{-\mathrm{II}}$ bezeichneten Punktes benützt.

[18]) Auf die Notwendigkeit, Beschleunigungen höherer Ordnung zu betrachten, hat bekanntlich C. G. J. Jacobi schon 1825 hingewiesen, s. die geschichtlichen Angaben bei W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, I, 2. Aufl. 1879, S. 570. Bei den heutigen schnell umlaufenden Maschinen kommt man auch in der Getriebetechnik nicht mehr ganz ohne die Beschleunigungen wenigstens zweiter Ordnung, also die Überbeschleunigungen im engeren Sinn aus.

9. Krümmung und Windung von Raumkurven. Es handelt sich im folgenden um Konstruktionen, bei denen für alle Punkte der gegebenen Kurve dieselben Hilfskurven zur Anwendung kommen, also nicht etwa, wie es bei der Lösung der betreffenden Aufgaben in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie fast immer verlangt wird, für jede Stelle der gegebenen Kurve wieder neue Hilfskurven zu konstruieren sind. Die gedanklich einfachste Konstruktion der zu irgendeinem Punkt einer Raumkurve gehörigen Krümmungsachse und des Mittelpunkts der Kugel, die man Schmiegungskugel schlechtweg zu nennen pflegt[19]), ist wohl bei der Krümmungsachse diejenige mit Hilfe einer sog. Äquitangentiale — d. h. bei der in Nr. 3 eingeführten Ausdrucksweise einer Hastkurve der gegebenen Kurve für konstante Schnelle des diese Kurve beschreibenden Punktes —, zu welcher bei der Konstruktion des Mittelpunkts jener Kugel eine „Äquitangentiale zweiter Ordnung" hinzukommt[20]). Bei der darstellend-geometrischen Ausführung ist also wiederholt in einer durch zwei Risse gegebenen Geraden eine Strecke vorgeschriebener Länge abzutragen. Will man diese, an sich zwar einfache Konstruktion vermeiden, so bietet sich folgender Weg dar. Man wähle als einen Riß der Hastkurve eine Gerade, z. B. den „Grundschnitt" oder eine Parallele dazu, so daß jeder andere Riß dieser Kurve in dem Schnitt der zur gegebenen Kurve gehörigen Torse mit einer projizierenden Ebene besteht und leicht zu konstruieren ist. Hierdurch vereinfacht sich in dem ersten Riß die Konstruktion der Zweithast nach Nr. 3, weil die Tangente in jedem Punkt einer geraden Linie die Gerade selbst ist. Hat man mit Hilfe der so vereinfachten Konstruktion die Zweithast $\ddot{x}$ für irgendeinen Punkt x der gegebenen Kurve in jedem der benützten Risse gefunden, so gibt zunächst ihre Verbindungsebene mit der Kurventangente in x die Schmiegungsebene. Die Normalebene der Kurve ist ohnehin als die zur Tangente senkrechte Ebene durch x unmittelbar bestimmt. Die Projektion x_n des Punktes $x_{-\mathrm{II}}$ auf die Hauptnormale der Kurve und damit die Normalbeschleunigung läßt sich finden, ohne daß die Hauptnormale selbst vorher zu konstruieren wäre, indem man die Parallele zur Tangente in x durch $x_{-\mathrm{II}}$ mit der Normalebene schneidet. Legt man vollends durch den Hastpunkt x_{I} die Ebene senkrecht zur Verbindungsebene von x_{I} mit x_n, so schneidet sie offenbar die schon gefundene Normalebene in der Krümmungsachse. Man hat also nur folgende elementaren Aufgaben zu lösen: Durch einen Punkt eine Ebene senkrecht zu einer Geraden zu legen, sowie eine Gerade mit einer Ebene bzw. zwei Ebenen miteinander zu schneiden.

Wieder andere Wege sind möglich, wenn Krümmung oder Windung einer Raumkurve oder beide für beliebig viele Punkte der Kurve gesucht sind. Schreitet im Zeitteilchen dt der Punkt x in seiner Bahn um das Wegelement ds fort und gehört hierzu der Drehungswinkel der Tangente $d\tau$, dreht sich ferner hierbei die Schmiegungsebene um die Tangente, um den Winkel $d\vartheta$, so ist $\dot{s}$ gleich der Schnelle v des Punktes, $\dot{\tau}/\dot{s}$ gleich der Krümmung k der Kurve oder $\dot{\tau}=v\,k$, $\dot{\vartheta}/\dot{s}$ gleich der Windung w der Kurve oder $\dot{\vartheta}=v\,w$. Man könnte davon Gebrauch machen, daß die Normalkomponente der Beschleunigung gleich $v^2 k$, die Binormalkomponente der Überbeschleunigung gleich $v^3 k\,w$ ist. Ich halte es aber für zweckmäßiger, besonders wenn Krümmung und Windung beide verlangt sind — wieder für beliebig viele Stellen der Kurve —, so vorzugehen: Ein Vektor der Länge eins in der Tangente, Hauptnormale, Binormale werde beziehlich $\mathbf{t}, \mathbf{h}, \mathbf{b}$ genannt, und zwar mögen diese Vektoren ein Rechtssystem bilden und zugleich die Richtungen von $\mathbf{t}$ und $\mathbf{h}$ dem Fortschreiten des Punktes in seiner Bahn sowie der Drehung der Tangente in der Schmiegungsebene entsprechend, so daß $\dot{s}$ und $\dot{\tau}$, also auch v und k positiv sind. Die unter Nr. 5 angegebene Konstruktion für die Hast $\dot{\mathbf{u}}$ eines Vektors $\mathbf{u}$ werde nun auf einen Vektor in der Hauptnormale (oder parallel zu ihr) angewendet, d. h. man setze

$$\mathbf{u}=\lambda\,\mathbf{h} \qquad \qquad (1),$$

wo λ eine unbestimmte Zahlgröße, nämlich die Länge von $\mathbf{u}$ (mit richtigem Vorzeichen genommen) bedeutet. Aus schon bekannten Gründen wird es zweckmäßig sein, λ so zu wählen, daß der Endpunkt des an den Punkt x (oder vielleicht auch einen andern Führungs-

[19]) In deutschen Lehrbüchern habe ich nur in demjenigen von Th. Schmid, I, 1912, S. 165, 3. Auflage 1922, S. 168, die Tatsache vermerkt gefunden, daß es zwei Schmiegungskugeln gibt, von welchen die, herkömmlicherweise allein berücksichtigte die Grenzgestalt der durch vier benachbarte Punkte der Kurve gehenden Kugel ist — Herr Th. Schmid nennt sie die Punktkrümmungskugel —, die andere, von Herrn Schmid Plankrümmungskugel genannte dagegen durch Grenzübergang aus der Kugel hervorgeht, welche vier benachbarte (orientierte) Schmiegungsebenen in derselben Weise berührt. Es scheint das Vorurteil zu bestehen, daß beide Kugeln identisch wären. Man bemerkt hier einen wesentlichen Unterschied zwischen den ebenen und den räumlichen Kurven: Bei den ersteren geben allerdings der Kreis durch drei benachbarte Punkte und der an drei benachbarte Tangenten sich anschmiegende Kreis in der Grenze denselben Kreis, den Krümmungskreis.

[20]) Die fraglichen Konstruktionen bilden die Ausdehnung einer von Nicolaïdes (1866) herrührenden Konstruktion für die Krümmungsmittelpunkte ebener Kurven auf den Raum, s. meine Mitteilung darüber in der Z. Math. Phys. 49 (1903), S. 464.

punkt) angetragenen Vektors $\boldsymbol{u}$ in einem der Risse eine Gerade beschreibt. Durch Ableiten von (1) nach der Zeit erhält man

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\lambda}\,\boldsymbol{h} + \lambda\,\dot{\boldsymbol{h}}\,.$$

Bekanntlich ist aber nach einer der Frenetschen Formeln in Vektorgestalt:

$$\dot{\boldsymbol{h}} = -v\,k\,\boldsymbol{t} + v\,w\,\boldsymbol{b}\,,$$

also

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\lambda}\,\boldsymbol{h} + \lambda(-v\,k\,\boldsymbol{t} + v\,w\,\boldsymbol{b}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Bezeichnen daher $\dot{u}_t$ und $\dot{u}_b$ die (mit richtigem Vorzeichen genommenen) Längen der zur Tangente und zur Binormale der Kurve parallelen Komponenten des gefundenen Vektors $\dot{\boldsymbol{u}}$, so ist

$$\dot{u}_t = -\lambda\,v\,k\,, \quad \dot{u}_b = \lambda\,v\,w\,.$$

Diese Längen, durch $\lambda\,v$ dividiert, ergeben also die gesuchte Krümmung und Windung. (Man erinnert sich, daß nicht nur die Länge von $\boldsymbol{u}$ beliebig gewählt werden kann, sondern auch die Schnelle v des Punktes x, die bei der Konstruktion von $\dot{\boldsymbol{u}}$ benützt wird.)

C. Neue Begriffe und Konstruktionen der sphärischen Kinematik.

10. Richtpunkt, Hastpunkt und Rückhastpunkt. Bei den folgenden Entwicklungen sollen die einfachsten Hilfsmittel der schon von Möbius begründeten sphärischen Punktrechnung[21]), nämlich die Addition von Punkten auf der Kugel sowie das innere Produkt zweier solcher Punkte benützt werden. Der fragliche Zweig der Punktrechnung ergibt sich aus der Vektorrechnung, wenn man sich alle Vektoren des Raumes an den Mittelpunkt einer Kugel vom Halbmesser eins angetragen denkt und als Bild eines beliebigen Vektors den Schnittpunkt der (als Halbstrahl vorgestellten) Linie des Vektors mit der Kugelfläche nimmt, und zwar mit einem Zahlwert gleich der Längenzahl des Vektors versehen. Wird die Richtung eines Vektors umgekehrt, so kann als dessen sphärisches Bild entweder der frühere Punkt beibehalten werden, sofern man ihm einen (absolut genommen ebenso großen) negativen Zahlwert beilegt, oder aber läßt man seinen Gegenpunkt auf der Kugel, jedoch mit demselben positiven Zahlwert, an die Stelle treten.

Zwei Punkte der Kugeloberfläche, die keine Gegenpunkte sind, haben offenbar zur sphärischen Summe stets einen Punkt auf dem sie verbindenden Großkreis[22]). Ferner ist, wenn man den Zahlwert eines Punktes durch Vorsetzen von mod. und mit Graßmann das innere Produkt durch einen senkrechten Strich zwischen den Faktoren bezeichnet:

$$\boldsymbol{a}\,|\,\boldsymbol{b} = \operatorname{mod} \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{mod} \boldsymbol{b} \cdot \cos \widehat{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}}\,.$$

Insbesondere gilt für einen beliebigen Punkt $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x} = (\operatorname{mod} \boldsymbol{x})^2.$$

Es bezeichne nun $\boldsymbol{x}$ einen zwangläufig auf der Kugel bewegten Punkt mit dem konstanten Zahlwert eins:

$$\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x} = 1\,.$$

Die Ableitung nach der Zeit ergibt

$$\boldsymbol{x}\,|\,\dot{\boldsymbol{x}} = 0\,,$$

zufolge welcher Gleichung der Punkt $\dot{\boldsymbol{x}}$ vom Punkt $\boldsymbol{x}$ um einen Quadranten absteht. Wegen

$$d\,t \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x} + d\,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$$

befindet sich $\dot{\boldsymbol{x}}$ auch sozusagen auf der sphärischen Tangente der Bahn von $\boldsymbol{x}$, nämlich auf dem Großkreis, der die Bahn im Punkt $\boldsymbol{x}$ berührt, und zwar liegt er von $\boldsymbol{x}$ aus gesehen in der Richtung der augenblicklichen Bewegung. Jener Punkt soll der zur augenblicklichen Lage des bewegten Punktes $\boldsymbol{x}$ gehörige *Richtpunkt* heißen. (Wegen einiger Sätze über Richt-

[21]) A. F. Möbius: Über eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik, Abh. Fürstl. Jablonowskischen Ges. Wiss. 1846 = Werke II, S. 3 bis 54.

[22]) Genauer: Bezeichnen auf der Kugel $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ drei Punkte mit dem Zahlwert 1, und ist

$$\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b} = \gamma\,\boldsymbol{c}\,,$$

so liegen diese Punkte auf einem und demselben Großkreis und ihre sphärischen Abstände genügen der Proportion

$$\sin \widehat{\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{b}} : \sin \widehat{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{c}} : \sin \widehat{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}} = \alpha : \beta : \gamma\,.$$

punkte vgl. den Anhang.) Wie man leicht einsieht, ist mod $\dot{x} = v$, unter v die Schnelle von x verstanden.

Für Konstruktionen eignet sich der Richtpunkt nicht sehr. Es gibt aber zur Konstruktion der Nr. **3** ein sphärisches Gegenstück, das unmittelbar erhalten wird, wenn man die Gleichungen der Nr. **3** beibehält, aber gemäß der sphärischen Punktrechnung umdeutet. Zunächst muß die Frage beantwortet werden, welche Bedeutung die durch

$$x_{\mathrm{I}} = x + \dot{x}, \quad x_{-\mathrm{I}} = x - \dot{x}$$

erklärten Punkte x_{I} und $x_{-\mathrm{I}}$ jetzt haben. Bildet man das innere Produkt der ersten Gleichung mit x und nachher mit $\dot{x}$, so kommt

$$x \mid x_{\mathrm{I}} = \operatorname{mod} x_{\mathrm{I}} \cdot \cos \widehat{x\, x_{\mathrm{I}}} = 1\,,$$

$$x_{\mathrm{I}} \mid \dot{x} = \operatorname{mod} x_{\mathrm{I}} \cdot \operatorname{mod} \dot{x} \cdot \sin \widehat{x\, x_{\mathrm{I}}} = v^2.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{mod} x_{\mathrm{I}} = \frac{1}{\cos \widehat{x\, x_{\mathrm{I}}}}$$

und besonders

$$\operatorname{tg} \widehat{x\, x_{\mathrm{I}}} = v\,.$$

Auf entsprechende Weise ergibt sich

$$\operatorname{tg} \widehat{x_{-\mathrm{I}}\, x} = v\,.$$

Wir wollen x_{I} den zu x gehörigen (sphärischen) *Hastpunkt*, $x_{-\mathrm{I}}$ den *Rückhastpunkt* nennen. Diese beiden Punkte ergeben sich also, wenn man vom Punkt x aus in der sphärischen Tangente seiner Bahn vorwärts und rückwärts einen Bogen gleich arctg v abträgt. Daß die beiden Punkte x_{I} und $x_{-\mathrm{I}}$ symmetrisch zu x liegen müssen, sieht man auch so ein: Sie werden, wie die Ausdrücke für diese Punkte zeigen, durch x und $\dot{x}$ harmonisch getrennt, weil aber die letzten beiden Punkte „normal" zueinander sind, nämlich um einen Quadranten voneinander abstehen, so müssen sie den inneren und äußeren Halbierungspunkt der sphärischen Strecke $x_{-\mathrm{I}}\, x_{\mathrm{I}}$ bilden. Rein geometrisch ergeben sich die sphärischen Hastpunkte unmittelbar, wenn man die Hastpunkte der räumlichen Bewegung des Punktes x vom Kugelmittelpunkt auf die Kugelfläche projiziert, welche Bemerkung auch für die nächste Nummer gilt. Eine rein analytische Erklärung dieser Begriffe und Begründung der zugehörigen Konstruktionen ist jedoch, wie sich zeigen wird, keineswegs überflüssig.

11. Konstruktion der Hastpunkte höherer Ordnung. Mittels der sphärischen Hastkurve und Rückhastkurve, also der Bahnen von x_{I} und $x_{-\mathrm{I}}$, läßt sich ohne weiteres der Punkt $x_{-\mathrm{II}}$, der sphärische Rückhastpunkt zweiter Ordnung finden. Denn aus

$$\dot{x} = x_{\mathrm{I}} - x = x - x_{-\mathrm{I}}$$

folgt wie früher

$$\ddot{x} = \dot{x}_{\mathrm{I}} - \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_{-\mathrm{I}}$$

und

$$x_{-\mathrm{II}} = x - \ddot{x} = x_{\mathrm{I}} - \dot{x}_{\mathrm{I}} = x_{-\mathrm{I}} + \dot{x}_{-\mathrm{I}}\,.$$

Die Punkte $\dot{x}_{\mathrm{I}}$ und $\dot{x}_{-\mathrm{I}}$ sind (zwar nicht notwendig normal zu x_{I} bzw. $x_{-\mathrm{I}}$, weil letztere Punkte keineswegs konstanten Zahlwert zu haben brauchen, aber doch) Punkte auf den sphärischen Tangenten der Bahnen von x_{I} und $x_{-\mathrm{I}}$, und ebenso auch die Punkte $(x_{\mathrm{I}} - \dot{x}_{\mathrm{I}})$ bzw. $(x_{-\mathrm{I}} + \dot{x}_{-\mathrm{I}})$. Der Punkt $x_{-\mathrm{II}}$ ist also einer der beiden Schnittpunkte der in x_{I} und $x_{-\mathrm{I}}$ an die Bahnen dieser Punkte gezogenen sphärischen Tangenten. Hat man sich bei irgendeiner Lage von x für einen dieser Gegenpunkte entschieden, so wird man selbstverständlich die Bahnen dieser Punkte benützen, falls weitere Konstruktionen auszuführen sind.

Der sphärische Zweithastpunkt $x_{\mathrm{II}} = x + \ddot{x}$ liegt nun zwar auf dem Großkreis, der $x_{-\mathrm{II}}$ mit x verbindet, aber (von singulären Fällen abgesehen) durchaus nicht symmetrisch zu $x_{-\mathrm{II}}$ bezüglich x. Denn wenn auch den Gleichungen für x_{II} und $x_{-\mathrm{II}}$ zufolge diese Punkte durch x und $\ddot{x}$ harmonisch getrennt werden, so sind letztere Punkte im allgemeinen keineswegs normal zueinander. Aus der früheren Gleichung $x \mid \dot{x} = 0$ folgt ja durch nochmalige Ableitung nach der Zeit

$$\dot{x} \mid \dot{x} + x \mid \ddot{x} = 0\,,$$

es kann also $x \mid \ddot{x}$ nur verschwinden, wenn $\dot{x} \mid \dot{x} = 0$ oder $v = 0$ ist, was nur bei singulären Bahnpunkten zutrifft. Wenn zur Weiterführung der Konstruktionen auch x_{II} benötigt werden sollte, so läßt sich dieser Punkt wegen des früher Bemerkten finden, sobald $\ddot{x}$ bekannt ist.

Dieser Punkt muß aber nicht nur auf dem Großkreis liegen, der den schon bekannten Punkt $x_{-\mathrm{II}}$ mit x verbindet, sondern auch, da $dt \cdot \ddot{x} = d\dot{x}$ ist, auf der sphärischen Tangente der Bahn von $\dot{x}$. Setzte man diese Betrachtungen fort, so käme man auf Konstruktionen für die Hastpunkte und Rückhastpunkte von höherer als zweiter Ordnung.

12. Sphärischer Krümmungsmittelpunkt. Mit Hilfe des Rückhastpunktes zweiter Ordnung $x_{-\mathrm{II}}$ läßt sich der Mittelpunkt x_c des die Bahn von x dreipunktig berührenden Kleinkreises durch eine Konstruktion finden, die ganz derjenigen für den Krümmungsmittelpunkt einer ebenen Kurve mittels Geschwindigkeit und Beschleunigung entspricht. (Man wird im allgemeinen den inneren Mittelpunkt, der hier gemeint ist, vor seinem Gegenpunkt bevorzugen.) Bezeichnet ϱ den sphärischen Halbmesser jenes Kreises, dann ist, wenn man x_c (wie x) den Zahlwert 1 beilegt:

$$x \mid x_c = \cos\varrho \qquad (1).$$

Weil dreipunktige Berührung vorhanden sein soll, sind außer (1) noch die beiden Gleichungen zu erfüllen, die aus (1) durch einmalige und zweimalige Ableitung nach der Zeit (bei konstantem x_c und konstantem ϱ) erhalten werden:

$$\dot{x} \mid x_c = 0\,, \quad \ddot{x} \mid x_c = 0\,.$$

Die letzte Gleichung von der ersten subtrahiert, gibt, weil

$$x - \ddot{x} = x_{-\mathrm{II}} \qquad (2)$$

ist,

$$x_{-\mathrm{II}} \mid x_c = \cos\varrho \qquad (3).$$

Das innere Produkt von (2) mit x liefert:

$$1 - \ddot{x} \mid x = x_{-\mathrm{II}} \mid x\,.$$

Nach Nr. 11 ist jedoch

$$\ddot{x} \mid x = -\dot{x} \mid \dot{x} = -v^2,$$

somit

$$x_{-\mathrm{II}} \mid x = 1 + v^2,$$

oder, da nach Nr. 10

$$v = \operatorname{tg} \widehat{x\,x_{\mathrm{I}}}$$

ist,

$$x_{-\mathrm{II}} \mid x = \frac{1}{\cos^2 \widehat{x\,x_{\mathrm{I}}}} \qquad (4).$$

Gl. (3) durch (4) dividiert, gibt

$$\frac{x_{-\mathrm{II}} \mid x_c}{x_{-\mathrm{II}} \mid x} = \cos\varrho \cdot \cos^2 \widehat{x\,x_{\mathrm{I}}} \qquad (5).$$

Nun sei x_n der (am nächsten bei $x_{-\mathrm{II}}$ liegende) Fußpunkt des von $x_{-\mathrm{II}}$ auf die sphärische Normale der Bahn von x gefällten sphärischen Lotes. Wendet man den cos-Satz der sphärischen Trigonometrie auf jedes der vier rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $x_{-\mathrm{II}}\,x_c\,x_n$, $x_{-\mathrm{II}}\,x\,x_n$, $x\,x_c\,x_{\mathrm{I}}$ und $x_n\,x\,x_{\mathrm{I}}$ an, so kommt, wenn der Zahlwert von $x_{-\mathrm{II}}$ vorübergehend mit μ bezeichnet wird:

$$x_{-\mathrm{II}} \mid x_c = \mu \cos \widehat{x_{-\mathrm{II}}\,x_c} = \mu \cos \widehat{x_n\,x_c} \cos \widehat{x_{-\mathrm{II}}\,x_n}\,,$$

$$x_{-\mathrm{II}} \mid x = \mu \cos \widehat{x_{-\mathrm{II}}\,x} = \mu \cos \widehat{x_n\,x} \cos \widehat{x_{-\mathrm{II}}\,x_n}\,,$$

$$\cos\varrho \cos \widehat{x\,x_{\mathrm{I}}} = \cos \widehat{x_c\,x_{\mathrm{I}}}\,, \quad \cos \widehat{x\,x_{\mathrm{I}}} = \frac{\cos \widehat{x_n\,x_{\mathrm{I}}}}{\cos \widehat{x_n\,x}}\,.$$

Setzt man in (5) ein, so heben sich außer μ die cos der sphärischen Strecken $x_{-\mathrm{II}}\,x_n$ und $x_n\,x$ weg und es bleibt

$$\cos \widehat{x_n\,x_c} = \cos \widehat{x_c\,x_{\mathrm{I}}} \cdot \cos \widehat{x_n\,x_{\mathrm{I}}} \qquad (6),$$

welcher Gleichung zufolge das Dreieck $(x_n\,x_{\mathrm{I}}\,x_c)$ bei x_{I} rechtwinklig ist. Damit ist eine Konstruktion für den sphärischen Krümmungsmittelpunkt x_c mittels der Punkte x_{I} und $x_{-\mathrm{II}}$ gefunden, die als ein sphärisches Gegenstück zu der allbekannten Konstruktion des Krümmungsmittelpunkts einer ebenen Kurve aus Geschwindigkeit und Beschleunigung des die Kurve beschreibenden Punktes anzusprechen ist.

Anmerkung, die nichteuklidische Differentialgeometrie und Kinematik betreffend. So wie bekanntlich die Geometrie auf der Kugel und die nichteuklidische Geometrie der Ebene im wesentlichen übereinstimmen, wobei Großkreis und Gerade einander entsprechen, ist auch die sphärische Punktrechnung in der nichteuklidischen enthalten[23]). Deshalb gelten die unter **10, 11** und **12** bewiesenen Gleichungen und die aus ihnen hergeleiteten Sätze, wofern man die nötigen Umdeutungen vornimmt, ohne weiteres auch für die nichteuklidische Differentialgeometrie und Kinematik bei allgemeinster projektiver Maßbestimmung, für den Raum und für Räume von beliebig viel Dimensionen so gut wie für die Ebene. Selbstverständlich sind im Fall der hyperbolischen Geometrie die Funktionen sin, cos, tg durch die Hyperbelfunktionen Sin, Cof, Tg zu ersetzen. So wird man hier, um Hastpunkt x_{I} und Rückhastpunkt $x_{-\mathrm{I}}$ zu erhalten, Ar Tg v/k — unter k die absolute Konstante der Maßbestimmungen verstanden — vorwärts und rückwärts abtragen müssen. Diese Strecke nennt V. Varićak bei seiner nichteuklidischen Deutung der speziellen Relativitätstheorie die physikalische Geschwindigkeit, im Gegensatz zu v als arithmetischer Geschwindigkeit[24]).

Die analytischen Ergebnisse der Nr. **12** in der nichteuklidischen Raumgeometrie (etwa der hyperbolischen) gedeutet, besagen folgendes: Wenn die Krümmungsachse einer, als Bahn eines Punktes x aufgefaßten Raumkurve zu bestimmen ist, so wähle man die Hastkurve (Bahn von x_{I}) entweder beliebig, oder in solcher Weise, daß einer der unter Nr. 2 erwähnten Vorteile besteht, konstruiere den Punkt $x_{-\mathrm{II}}$ mittels der Tangenten der Hastkurve und Rückhastkurve (Bahn von $x_{-\mathrm{I}}$) in x_{I} bzw. $x_{-\mathrm{I}}$, nämlich als ihren Schnittpunkt, fälle von ihm das Lot auf die Normalebene der Kurve zum Punkt x, verbinde dessen Fußpunkt x_n mit x_{I} und lege durch x_{I} die Ebene senkrecht zu genannter Verbindungslinie. Diese Ebene schneidet die Normalebene der Kurve in der gesuchten Krümmungsachse. (Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß in der hyperbolischen Kinematik zu einem Punkt im Innern des absoluten Gebildes — einem „Feldpunkt" nach der Ausdrucksweise von H. Liebmann[25]) — als Richtpunkt ein solcher außerhalb des absoluten Gebildes — ein „Überpunkt" nach Liebmann — gehört, ferner daß, auch wenn Hastpunkt x_{I} und Rückhastpunkt $x_{-\mathrm{I}}$ beide Feldpunkte sind, recht wohl der Zweitrückhastpunkt $x_{-\mathrm{II}}$ ein Überpunkt sein kann.)

Anhang.

13. Beschleunigungen bei einer beliebig-veränderlichen geraden Punktreihe. Wird bei einer zwangläufig bewegten geraden Punktreihe ein beliebiger, aber bestimmter Punkt mit a, dagegen ein unbestimmter Punkt mit x, ferner ein im Träger der Punktreihe befindlicher mitbewegter Einheitsvektor mit $\mathbf{e}$ bezeichnet, und legt man den Punkten je den Zahlwert eins bei, so kann gesetzt werden:

$$x = a + \lambda\,\mathbf{e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wo λ die Länge der Strecke von a nach x bedeutet, positiv oder negativ genommen, je nachdem diese Strecke dieselbe Richtung hat wie $\mathbf{e}$, oder die umgekehrte. Die Ableitung von (1) nach der Zeit ergibt:

$$\dot{x} = \dot{a} + \lambda\,\dot{\mathbf{e}} + \dot{\lambda}\,\mathbf{e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Wenn man beide Gleichungen addiert und die Hastpunkte

$$a + \dot{a} = a_{\mathrm{I}}, \quad x + \dot{x} = x_{\mathrm{I}}$$

einführt, auch $\mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_{\mathrm{I}}$ setzt, so kommt:

$$x_{\mathrm{I}} = a_{\mathrm{I}} + \lambda\,\mathbf{e}_{\mathrm{I}} + \dot{\lambda}\,\mathbf{e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Bewegte sich die Punktreihe als starre, so wäre λ konstant, also $\dot{\lambda} = 0$, und man erhielte den bekannten Satz, daß bei einer starren geraden Punktreihe die Hastpunkte in jedem Augenblick eine zu ihr ähnliche gerade Punktreihe bilden. Ist jedoch λ veränderlich, also die Punktreihe nicht starr, dann liegt, wie die letzte Gleichung zeigt, x_{I} auf einer zu $\mathbf{e}$, d. h. zur augenblicklichen Lage des Trägers der Punktreihe parallelen Geraden durch den Punkt $(a_{\mathrm{I}} + \lambda\,\mathbf{e}_{\mathrm{I}})$. Alle diese Geraden bilden somit einen Parallelstrahlenbüschel, der zur augenblick-

[23]) Die Anwendung der Graßmannschen Punktrechnung auf nichteuklidische Geometrie hat Homersham Cox 1882 gezeigt (Trans. Cambridge Phil. Soc., vol. XIII, part. II, p. 69 bis 143) und auch A. N. Whitehead 1898 eingehend behandelt (Universal Algebra, I, Book VI, p. 349 bis 502), sowie neuerdings A. Lotze: „Punktrechnung und nichteuklidische Geometrie", Festschrift des Karlsgymnasiums, Stuttgart 1931.

[24]) Vladimir Varićak: Darstellung der Relativitätstheorie im dreidimensionalen Lobatschefskijschen Raume, Zagreb 1924, S. 11.

[25]) Heinrich Liebmann: Nichteuklidische Geometrie, 3. Auflage 1923, S. 28.

lichen Phase der Punktreihe geometrisch ähnlich ist[26]). Leitet man Gl. (2) wieder nach der Zeit ab, so ergibt sich

$$\ddot{x} = \ddot{a} + \lambda\, \ddot{\mathbf{e}} + 2\, \dot{\lambda}\, \dot{\mathbf{e}} + \ddot{\lambda}\, \mathbf{e}\,,$$

oder wenn man auch diese Gleichung zu (1) addiert und die Zweithastpunkte $a + \ddot{a} = a_{II}$, $x + \ddot{x} = x_{II}$ wie auch den Vektor $\mathbf{e} + \ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_{II}$ einführt:

$$x_{II} = a_{II} + \lambda\, \mathbf{e}_{II} + 2\, \dot{\lambda}\, \dot{\mathbf{e}} + \ddot{\lambda}\, \mathbf{e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Bei konstantem λ, also im Fall einer starren Punktreihe, fielen die letzten beiden Glieder fort und es ergäbe sich wieder ein bekannter Satz, nämlich, daß die Zweithastpunkte x_{II} dann ebenfalls eine zur bewegten ähnliche Punktreihe bilden. Sind aber $\dot{\lambda}$ und $\ddot{\lambda}$ nicht Null, so muß zufolge (4) der Punkt x_{II} in der durch $(a_{II} + \lambda\, \mathbf{e}_{II})$ gehenden, zu den Vektoren $\dot{\mathbf{e}}$ und $\mathbf{e}$ parallelen Ebene liegen. Alle diese, zu den verschiedenen Punkten der Reihe gehörigen Ebenen bilden offenbar einen Parallel-Ebenenbüschel, der zur augenblicklichen Phase der bewegten Punktreihe ähnlich ist. Der Träger der Punktreihe erzeugt bei der Bewegung im allgemeinsten Fall eine windschiefe Regelfläche. Wie man leicht einsieht, ist die durch die beiden Vektoren $\mathbf{e}$ und $\dot{\mathbf{e}}$ bestimmte Stellung zugleich diejenige der zur fraglichen Erzeugenden gehörigen sog. asymptotischen Tangentenebene der Regelfläche.

14. Richtpunkte, Hastpunkte und Zweithastpunkte einer starren oder beliebig-veränderlichen geraden Punktreihe in der nichteuklidischen Kinematik. Um gewissen Unbequemlichkeiten aus dem Wege zu gehen, beschränken wir uns auf elliptische Geometrie und setzen die absolute Konstante der Maßbestimmung gleich eins. Sind a und b zwei zueinander normale, aber sonst beliebige Punkte einer zwangläufig bewegten geraden Punktreihe, so läßt sich ein beliebiger Punkt x der Reihe durch die Gleichung darstellen:

$$x = \cos\varphi\, a + \sin\varphi\, b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Sie gibt, nach der Zeit abgeleitet, wenn man zur Abkürzung

$$-\sin\varphi\, a + \cos\varphi\, b = \bar{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

setzt:

$$\dot{x} = \cos\varphi\, \dot{a} + \sin\varphi\, \dot{b} + \dot{\varphi}\, \bar{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Offenbar liegt $\bar{x}$ auf der bewegten Geraden und ist normal zu x. Wie Gl. (3) zeigt, bildeten im Fall einer starren Punktreihe, $\dot{\varphi} = 0$, die Richtpunkte $\dot{x}$ eine zur bewegten projektive Punktreihe. Derjenige dieser Punkte, der x entspricht, heiße x':

$$\cos\varphi\, \dot{a} + \sin\varphi\, \dot{b} = x'.$$

Dann folgt aus

$$\dot{x} = x' + \dot{\varphi}\, \bar{x}\,,$$

daß bei einer beliebig veränderlichen geraden Punktreihe $\dot{x}$ auf eine Gerade als geometrischen Ort beschränkt ist. Die beiden gefundenen Sätze gelten auch für die Hastpunkte, wie man aus der, durch Addieren von (1) und (3) mit der Abkürzung

$$\cos\varphi\, a_I + \sin\varphi\, b_I = x_I'$$

sich ergebenden Gleichung

$$x_I = x_I' + \dot{\varphi}\, \bar{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

sieht. Gegenüber der euklidischen Kinematik besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied: Für gewöhnlich bilden die gefundenen geometrischen Örter keinen Strahlenbüschel, denn läßt man x die bewegte Punktreihe in irgendeiner ihrer Phasen durchlaufen, so beschreibt $\bar{x}$ eine damit kongruente Punktreihe, die nicht perspektiv zur Punktreihe der x_I' zu liegen braucht.

Leitet man (1) bei konstantem φ zweimal nach der Zeit ab, so kommt

$$\ddot{\mathbf{x}} = \cos\varphi\, \ddot{a} + \sin\varphi\, \ddot{b}\,,$$

und wenn man zu (1) addiert:

$$x_{II} = \cos\varphi\, a_{II} + \sin\varphi\, b_{II}\,.$$

Hiernach ist im Fall einer starren Punktreihe sowohl die Reihe der „Richtpunkte zweiter Ordnung" $\ddot{x}$ wie die Reihe der Zweithastpunkte x_{II} ebenfalls projektiv zur bewegten Reihe. Bei einer beliebig-veränderlichen bewegten geraden Punktreihe — φ nicht konstant — bestehen jedoch für die Richtpunkte und Hastpunkte zweiter Ordnung hier keine so einfachen Sätze mehr, wie in der euklidischen Kinematik, weshalb darauf nicht eingegangen werden soll. 362

[26]) Seinem Inhalt nach findet sich dieser Satz, der übrigens ohne Rechnung unmittelbar aus dem Satz über die Geschwindigkeiten bei zusammengesetzter Bewegung und demjenigen über die Geschwindigkeiten bei einer starren geraden Punktreihe erhalten werden kann, bei G. Peano: Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Torino 1887, p. 322. Sonderfälle davon lassen sich weiter zurückverfolgen und spielen bei zahlreichen älteren Konstruktionen für die Tangenten von Kurven eine Rolle.

Über ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete.

Von *K. Zarankiewicz* in Warschau.

§ 1. In einigen in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten[1]) wurde die Frage der Berechnung des magnetischen Feldes im Eisen eines Transformators unter Heranziehung der Methoden der Funktionentheorie näher untersucht. Wie in diesen Arbeiten gezeigt wurde, führt diese Aufgabe unter einigen vereinfachten Annahmen zu dem folgenden mathematischen Problem: es ist ein Gebiet gegeben, das den Querschnitt des Transformators von der in Abb. 1 bzw. 2 angegebenen Gestalt darstellt; es wird eine Funktion gesucht, die am Rande dieses Gebietes konstant ist und im Innern sich harmonisch verhält. Wie in den genannten Arbeiten gezeigt wurde, kann diese Aufgabe im Falle der Symmetrie des Gebietes unter Heranziehung von hyperelliptischen Integralen gelöst werden. In gewissen Fällen verwendet man aus konstruktiven Rücksichten Eisenkerne, deren Querschnitte (siehe Abb. 3) keine Symmetrie besitzen. In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit einem allgemeinen Verfahren, das eine konforme Abbildung eines zweifach zusammenhängenden Gebietes auf das Innere eines Kreisringes „effektiv" durchzuführen erlaubt und somit die Möglichkeit gibt, mindestens zunächst im Prinzip, die oben formulierte Aufgabe im unsymmetrischen Falle, wie auch im Falle, wo die Berandung des Querschnittes nicht mehr aus geradlinigen Strecken besteht, zu lösen. Kennt man nämlich die konforme Abbildung des Kreisringes auf das zweifach zusammenhängende Gebiet, welches den Querschnitt des Eisens eines Transformators darstellt, so kennt man auch die Equipotentiallinien des magnetischen Feldes, da sie die Bilder der konzentrischen Kreise im Kreisringe sind.

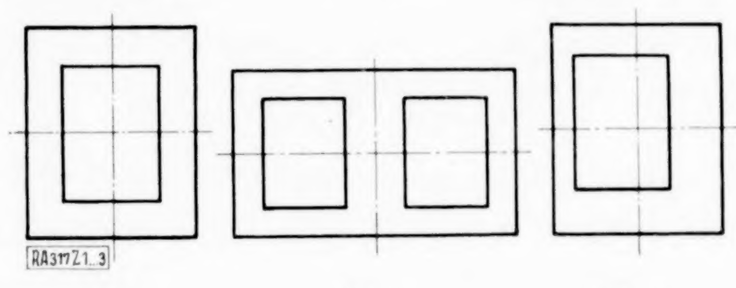


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3.

Ein Kreisring, der durch zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und 1 ($r < 1$) berandet ist, werden wir mit K_r bezeichnen. Ferner bezeichnen wir mit k_m (bzw. r_m) denjenigen Kreis (bzw. seinen Radius), welcher bei einer Ähnlichkeitstransformation des K_r in sich festbleibt, die den äußeren Begrenzungskreis in den inneren Begrenzungskreis und umgekehrt überführt. Unsere Aufgabe besteht also darin, ein numerisches Verfahren anzugeben, um die konforme und schlichte Abbildung eines gegebenen zweifach zusammenhängenden nicht ausgearteten, durch zwei reguläre Kurven begrenzten Gebietes G auf ein K_r herzustellen. Dieses Verfahren gründet sich in erster Linie auf die in den letzten Jahren erschienenen Untersuchungen von S. Bergmann über komplexe Orthogonalfunktionen und deren Zusammenhang mit einer invarianten nichteuklidischen Metrik, die im Falle eines einfach zusammenhängenden (ebenen) Gebietes in die hyperbolische (Poincaréshe) Metrik des Einheitskreises übergeht.

Zuerst sei bemerkt, daß nach bekannten Sätzen[2]) die konforme Abbildung eines solchen Gebietes G auf ein K_r immer möglich und, abgesehen von Drehungen und Spiegelung in bezug auf k_m, nur eine einzige ist. Ferner sei noch erwähnt, daß zwei Kreisringe dann und nur dann aufeinander konform und schlicht abbildbar sind, wenn sie ähnlich sind, d. h. wenn das Radienverhältnis der beiden Begrenzungskreise in beiden Ringen gleich ist. Zwei K_r und $K_{r'}$ sind also nur dann abbildbar, wenn $r = r'$ ist. Zu jedem Gebiete G existiert also ein und nur ein K_r, auf den G konform abbildbar ist. Die Zahl r ist somit durch das Gebiet G eindeutig bestimmt und ist für G charakteristisch; diese Zahl wird als Modul des Gebietes G bezeichnet. Die erste sich aufdrängende Frage ist die der Bestimmung des Moduls bei einem gegebenen G. Ich begnüge mich mit der Angabe eines numerischen Verfahrens, das die näherungsweise Berechnung des Moduls bei gegebenem G ermöglicht.

§ 2. Wir erwähnen jetzt einige Definitionen und Sätze aus der Theorie der Orthogonalfunktionen[3]). Es sei G ein abgeschlossenes Gebiet der komplexen z-Ebene und $\mathfrak{K}$ irgendwelche Klasse von den im G eindeutigen und regulären Funktionen. Zwei Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ der Klasse $\mathfrak{K}$ heißen im G zueinander orthogonal, wenn

$$\iint_G f_1(z) \cdot \overline{f_2(z)}\, d\omega = 0,$$

[1]) S. Bergmann: Über die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Einphasen-Transformator, Zeitschr. für angewandte Math. u. Mech., Bd. 5, S. 319, 1925; Über die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals usw., Math. Zeitschr., Bd. 19, S. 8, 1923; G. Stein: Potentialtheoretische Untersuchungen über Magnetfelder in Transformatoren usw., Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., Bd. 9, S. 23, 1929.

[2]) Vgl. L. Lichtenstein: Enzyklopädie der Math. Wissenschaften II. C. 3 oder P. Koebe: Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildungen, Journal f. reine u. angew. Math., Bd. 145, S. 203. H. Villat: Sur la représentation conforme des aires doublement connexes, Ann. de l'Ecole Normale, Serie III, Tome 38, 1921.

[3]) Siehe S. Bergmann: Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen usw.. Math. Ann., Bd. 86, S. 238; Über Hermitesche unendliche Formen usw., Math. Zeitschr., Bd. 29, S. 641; ferner G. Szegö: Über orthogonale Polynome usw., Math. Zeitschr., Bd. 9, S. 218; S. Bochner: Über orthogonale Systeme usw., Math. Zeitschr., Bd. 14, S. 180.

wobei $d\omega$ das Flächenelement, $\bar{f}$ der konjugiert komplexe Wert zu f bedeutet und das Doppelintegral über das ganze Gebiet G genommen ist. Eine Folge von Funktionen aus der Klasse $\mathfrak{K}$

$$\varphi_1(z),\quad \varphi_2(z),\ \ldots\ldots\ \varphi_n(z),\ \ldots\ldots \qquad (1)$$

bildet ein normiertes Orthogonalsystem, wenn je zwei Funktionen dieser Folge zueinander orthogonal sind und außerdem noch

$$\iint_G \varphi_n(z)\cdot\overline{\varphi_n(z)}\cdot d\,\omega = \iint_G |\varphi_n(z)|^2\, d\,\omega = 1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

gilt. Ist $\{f_n(z)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ irgendwelche Folge von linear unabhängigen Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}$, so kann man z. B. nach dem bekannten Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren ein normiertes Orthogonalsystem $\{\varphi_n(z)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ bilden, wo $\varphi_n(z)$ sich linear durch $f_k(z)$, wo $1 \leq k \leq n$, ausdrückt. Greift man eine beliebige Funktion $f(z)$ aus der Klasse $\mathfrak{K}$ heraus und bildet man die Ausdrücke

$$a_n = \iint_G f(z)\cdot\overline{\varphi_n(z)}\, d\,\omega\,,$$

welche man als Fourierkoeffizienten der Funktion $f(z)$ in bezug auf das Orthogonalsystem (1) zu bezeichnen pflegt, so ist bekanntlich

$$\iint_G |f(z)|^2\, d\,\omega \geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \qquad (2)$$

(Besselsche Ungleichung). Bedeuten a_n die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(z)$, in bezug auf das Orthogonalsystem (1), und b_n irgendwelche Konstanten, so gilt:

$$\iint_G |f(z) - \sum_{k=1}^{k=n} a_k\,\varphi_k(z)|^2\, d\,\omega \leq \iint_G |f(z) - \sum_{k=1}^{k=n} b_k\,\varphi_k(z)|^2\, d\,\omega \qquad (3).$$

Besteht insbesondere für jede Funktion der Klasse $\mathfrak{K}$ in der Formel (2) genau das Gleichheitszeichen, so nennt man das System (1) vollständig in bezug auf die Klasse $\mathfrak{K}$; in diesem und nur in diesem Falle gilt für *jede* Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{K}$ die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\varphi_n(z)\,,$$

wobei die Reihe in jedem ganz im Innern von G gelegenen Gebiete gleichmäßig und absolut konvergiert.

Eine besondere Rolle spielt die Funktion

$$K(z, \bar{a}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\cdot\overline{\varphi_n(a)}\,,$$

wobei $\varphi_n(z)$ ein vollständiges in bezug auf $\mathfrak{K}$ normiertes Orthogonalsystem und a ein innerer Punkt des Gebietes G ist. Die Reihe konvergiert für jeden inneren Punkt des Gebietes G und stellt eine in G reguläre Funktion dar. Die Funktion $K(z, \bar{z})$, welche man nach S. Bergmann als die „Kernfunktion des Gebietes" G in bezug auf die Klasse $\mathfrak{K}$ bezeichnet, nimmt nur reelle Werte an und ist eine reguläre Funktion von zwei reellen Veränderlichen. Die Kernfunktion ist auch dadurch charakterisiert, daß sie als die obere Schranke von $|f(z)|^2$ definiert werden kann, wenn $f(z)$ alle Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}$ durchläuft, für die $\iint_G |f(z)|^2\, d\,\omega \leq 1$ ist. Daraus folgt, daß die Kernfunktion von der Wahl des speziellen vollständigen Orthogonalsystems der Klasse $\mathfrak{K}$ unabhängig ist[4]).

Es sei eine eindeutige und reguläre Funktion $z^* = z^*(z)$ gegeben, die ein abgeschlossenes, durch reguläre Kurven berandetes Gebiet G in der z-Ebene konform und schlicht auf ein abgeschlossenes Gebiet G^* in der z^*-Ebene abbildet. Es sei von nun an unter $\mathfrak{K}$ eine bestimmte Funktionenklasse, nämlich die Klasse aller Funktionen $f(z)$ verstanden, die in G normiert (d. h. $\iint |f(z)|^2\, d\,\omega = 1$), regulär und nebst ihren Integralen eindeutig sind; mit $\mathfrak{K}^*$ soll die entsprechende Klasse von Funktionen im Gebiete G^* bezeichnet sein.

Wendet man auf die Funktionen der Klasse $\mathfrak{K}$ die analytische Transformation $z = z(z^*)$ an, so geht die Klasse $\mathfrak{K}$ in die Klasse $\mathfrak{K}^*$ über. In der Tat, ordnet man der Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{K}$ die Funktion $F(z^*) = f[z(z^*)]\cdot\frac{d\,z}{d\,z^*}$ zu, so ist $F(z^*)$ ebenfalls in dem abgeschlossenen Gebiete G^* eine eindeutige reguläre Funktion, da dort beide Faktoren ebensolche Funktionen sind (auch am Rande); ferner ist

[4]) S. Bergmann: Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. Journal f. reine u. angew. Math., Bd. 169 (1933), S. 2 ff.

$$\int_{z_1^*}^{z_2^*} F(z^*)\, dz^* = \int_{z_1}^{z_2} f(z) \frac{dz}{dz^*} \cdot \frac{dz^*}{dz}\, dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz\,, \qquad \iint_G d\omega = \iint_{G^*} \left|\frac{dz}{dz^*}\right|^2 d\omega^*\,,$$

was die Eindeutigkeit des Integrals von $F(z^*)$ in G^* und die Erhaltung der Orthogonalität und der Normierung bedeutet.

Insbesondere geht das vollständige Orthogonalsystem $\varphi_n(z)$ in das für das Gebiet G^* vollständige Orthogonalsystem $\varphi_n(z^*) = \varphi_n[z(z^*)] \cdot \frac{dz}{dz^*}$ über. Hieraus folgt weiter die Beziehung für die Kernfunktion $K^*(z^*, \overline{z^*})$ des Gebietes G^*

$$K^*(z^*, \overline{z^*}) = \frac{K(z, \bar z)}{\frac{dz^*}{dz} \cdot \frac{d\bar z^*}{d\bar z}} = \frac{K(z, \bar z)}{\left|\frac{dz^*}{dz}\right|^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

oder

$$\sqrt{K^*(z^*, \bar z^*)} \cdot |dz^*| = \sqrt{K(z, \bar z)} \cdot |dz| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,\mathrm{a}).$$

Man setzt nun [5])

$$(M) \qquad ds^* = \sqrt{K(z^*, \bar z^*)} \cdot |dz^*| \quad \text{bzw.} \quad ds = \sqrt{K(z, \bar z)} \cdot |dz|\,,$$

wobei unter ds^* bzw. ds das Bogenelement in G^* bzw. G verstanden ist und definiert als „nichteuklidische" Länge des einfachen Bogens Γ^* bzw. Γ mit den Endpunkten $z_1^*\, z_2^*$ bzw. $z_1\, z_2$ den Wert des Integrales

$$\int_{z_1^*}^{z_2^*} \sqrt{K(z^*\, \bar z^*)} \cdot |dz^*| \quad \text{bzw.} \quad \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{K(z, \bar z)} \cdot |dz|\,,$$

wo die Integration längs des Bogens Γ^* bzw. Γ ausgeführt ist. Ist der Bogen Γ das konforme Bild von Γ^*, so sind nach (4a) die beiden Integrale einander gleich, was mit anderen Worten bedeutet, daß die „nichteuklidischen" Längen der entsprechenden Bögen in beiden Gebieten übereinstimmen.

Durch (M) ist somit eine „nichteuklidische" Metrik aufgestellt, die gegenüber analytischen Transformationen invariant ist.

Eine weitere Invariante erhält man in dem Ausdruck:

$$\boldsymbol{I}(z, \bar z) = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial^2 \log K}{\partial z\, \partial \bar z}\,.$$

Es ist nämlich nach (4)

$$\log K^* = \log K - \log \frac{dz^*}{dz} - \log \frac{d\bar z^*}{d\bar z}\,,$$

und nach zweimaliger Differentiation zuerst nach z, dann nach $\bar z$ bekommen wir:

$$\frac{\partial^2 \log K^*}{\partial z^*\, \partial \bar z^*} \cdot \frac{dz^*}{dz} \cdot \frac{d\bar z^*}{d\bar z} = \frac{\partial^2 \log K}{\partial z\, \partial \bar z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5);$$

da aber nach (4)

$$\frac{dz^*}{dz} \cdot \frac{d\bar z^*}{d\bar z} = \frac{K(z, \bar z)}{K^*(z^*, \bar z^*)}$$

ist, so geht die Formel (5) in

$$\frac{\partial^2 \log K^*}{\partial z^*\, \partial \bar z^*} \cdot \frac{1}{K^*} = \frac{\partial^2 \log K}{\partial z\, \partial \bar z} \cdot \frac{1}{K}$$

über.

§ 3. Es sei jetzt angenommen, daß das Gebiet G^* ein K_r ist. Wendet man das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Folge z^n an, wo der Exponent n alle positiven und negativen ganzen Zahlen, die Zahl $n = -1$ ausgenommen, durchläuft, so bekommt man das normierte Orthogonalsystem, welches aus den Funktionen

$$\varphi_n(z^*) = z^{*n} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{\pi(1 - r^{2(n+1)})}}\,, \quad \text{wo} \quad -1 \neq n = 0, 1, 2, -2, \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

[5]) S. Bergmann: Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. I Journal f. reine u. angew. Math., Bd. 169 (1933), S. 5 und II (erscheint demnächst in derselben Zeitschrift). Vgl. auch S. Bergmann: Über Randpunkte von Gebieten in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen und Bergmann: Über die Abbildungen usw., Jahresb. d. deutsch. Math. Vereinigung, Bd. 39 (1930), S. 26.

Bezüglich der im weiteren benutzten Schreibweise sei bemerkt, daß üblicherweise gesetzt wird:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{d\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \quad z = x + i\,y\,.$$

besteht. Wir behaupten, daß (8) ein in bezug auf die Klasse $\mathfrak{K}^*$ vollständiges System ist. In der Tat, greift man eine beliebige Funktion $f(z^*)$ aus $\mathfrak{K}^*$ heraus, so ist nach Voraussetzung $\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz$ (wir lassen einfach die Sterne weg) im abgeschlossenen Kreisringe K_r eindeutig und regulär, läßt sich also in eine Laurentreihe entwickeln:

$$\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n z^n ,$$

die auch am Rande konvergiert. Nach Differentiation erhalten wir

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n\, b_n z^{n-1} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' c_n z^n ,$$

wobei in der letzten Reihe das Glied $n = -1$ fehlt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man also ein k bestimmen, so daß in K_r überall

$$\left| f(z) - \sum_{n=-k}^{+k} c_n z^n \right| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\text{Fläche von } K_r}} = \eta$$

gilt; ersetzt man die Potenzen z^n durch die Ausdrücke (8) und bezeichnet man die neuen Koeffizienten mit e_n, so ist

$$\left| f(z) - \sum_{n=-k}^{+k} e_n \varphi_n(z) \right| < \eta \quad \text{und weiter} \quad \iint_{K_r} \left| f(z) - \sum_{-k}^{+k} e_n \varphi_n(z) \right|^2 d\omega < \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Dann ist aber nach Formel (3)

$$\iint_{K_r} \left| f(z) - \sum_{-k}^{+k} a_n \varphi_n(z) \right|^2 d\omega < \varepsilon ,$$

wo a_n die Fourierkoeffizienten von $f(z)$ in bezug auf das System $\varphi_n(z)$ sind, was gerade bedeutet, daß (8) ein vollständiges Orthogonalsystem ist.

Die Kernfunktion des Gebietes K_r kann somit durch die Formel

$$K(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{(n+1) \cdot |z|^{2n}}{1 - r^{2(n+1)}} \quad n \neq -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

dargestellt werden; wenn man die Summe in zwei Teile spaltet und den Summationindex (bei negativen Gliedern) $-n-1$ gleich n setzt, bekommt man

$$K(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi\, \varrho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, r^n}{1 - r^{2n}} \left(\frac{\varrho^{2n}}{r^n} + \frac{r^n}{\varrho^{2n}} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

wo außerdem $|z| = \varrho$ gesetzt ist.

Es sei hier bemerkt, daß bei einfach zusammenhängenden Gebieten und der Klasse aller eindeutigen und regulären Funktionen $I(z, \bar{z})$ eine Konstante ist, was man für den Kreis durch Ausrechnung bestätigen kann.

Der weitere Ausbau der hier geschilderten Methode verlangt den Nachweis, daß die auf diese Weise erhaltene Invariante nicht konstant ist und daß sie ein Maximum besitzt.

Den Beweis erbringen wir, indem wir uns auf die bekannte Formel aus der Theorie der elliptischen Funktionen stützen[6]):

$$\wp(u \,|\, \omega_1, \omega_2) = -\frac{\eta_2}{\omega_2} + \left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \dfrac{\pi u}{\omega_2}} - \frac{8\pi^2}{\omega_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, q^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos \frac{2 n \pi u}{\omega_2} \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

wo $\wp$ die bekannte Weierstraßsche Funktion bedeutet. Wir erhalten leicht

$$\wp\left(u \,\Big|\, \frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right) - \wp(u \,|\, \omega_1, \omega_2) = \frac{\eta_2 - \eta_2^*}{\omega_2} - \frac{8\pi^2}{\omega_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, q^n}{1 - q^{2n}} \cos \frac{2 n \pi u}{\omega_2} ,$$

wobei die Konstante η_2^* für die Funktion $\wp\left(u \,\Big|\, \dfrac{\omega_1}{2}, \omega_2\right)$ dieselbe Bedeutung wie η_2 für $\wp(u \,|\, \omega_1, \omega_2)$ hat.

[6]) R. Fricke: Die elliptischen Funktionen, Erster Teil, S. 270, B. G. Teubner, 1916. Ich verdanke diesen Beweis einer mündlichen Mitteilung des Herrn S. Kulczycki.

Setzt man

$$q = r, \quad e^{\frac{2 i \pi u}{\omega_2}} = \frac{|z|^2}{r} = \frac{\varrho^2}{r} \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

so ist nach (11)

$$K(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi \varrho^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{4 \pi^2} \left[\frac{\eta_2 - \eta_2^*}{\omega_2} - \mathfrak{P}\left(u / \frac{\omega_1}{2}, \omega_2\right) + \mathfrak{P}(u / \omega_1, \omega_2) \right].$$

Unter Heranziehung der bekannten Formel[7]) folgt nach einigen Rechnungen

$$K(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi \varrho^2} \cdot \frac{\omega_2}{4 \pi^2} \left[-\frac{\eta_2}{\omega_2} - \mathfrak{P}\left(u + \frac{\omega_1}{2} / \omega_1, \omega_2\right) \right] \quad \ldots \ldots \quad (13\text{a});$$

man kann z. B. $\omega_2 = 1$ setzen und man erhält

$$K(z, \bar{z}) = \frac{1}{4 \pi^3 \varrho^2} \left[-\eta_2 - \mathfrak{P}\left(\frac{\log \varrho}{i \pi} \Big/ \frac{\log r}{i \pi}, 1 \right) \right].$$

Somit nimmt die Invariante

$$\boldsymbol{I}(z, \bar{z}) = \frac{\partial^2 \log K}{\partial z \partial \bar{z}} \cdot \frac{1}{K} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \log K}{\partial \varrho} \right) \cdot \frac{1}{K}$$

nach (13a) die Gestalt

$$\frac{\pi}{\left(\frac{\eta_2}{\omega_2} + \mathfrak{P}(u + \frac{\omega_1}{2} \,|\, \omega_1, \omega_2) \right)} \cdot \frac{\partial^2 \log \left[-\frac{\eta_2}{\omega_2} - \mathfrak{P}\left(u + \frac{\omega_1}{2} \,|\, \omega_1, \omega_2 \right) \right]}{\partial u^2}$$

an. Unter Berücksichtigung der Formeln

$$\mathfrak{P}'^2 = 4 \mathfrak{P}^3 - g_2 \mathfrak{P} - g_3, \quad \mathfrak{P}'' = 6 \mathfrak{P}^2 - \frac{1}{2} g_2$$

erhalten wir

$$\boldsymbol{I}(z, \bar{z}) = \pi \left[2 + \frac{(g_2 - 12 \eta_2^2) \cdot \mathfrak{P} + 2 g_3 - g_2 \eta_2 - 4 \eta_2^3}{2 (\eta_2 + \mathfrak{P})^3} \right] \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Im folgenden wird bewiesen, daß $g_2 - 12 \eta_2^2 \neq 0$; woraus hervorgeht, daß $\boldsymbol{I}(z, \bar{z})$ keine Konstante ist. Jetzt wollen wir beweisen, daß die Funktion $\boldsymbol{I}(z, \bar{z})$ im Intervall $(r, 1)$ nur ein einziges Extremum, und zwar ein Maximum besitzt. Für die Ableitung von $\boldsymbol{I}$ gilt:

$$\frac{d \boldsymbol{I}}{d \varrho} = \frac{-\pi}{(\mathfrak{P} + \eta_2)^4} \cdot \left[\mathfrak{P} - \frac{2 g_2 \eta_2 - 3 g_3}{g_2 - 12 \eta_2^2} \right] \cdot \frac{d \mathfrak{P}}{d \varrho} \quad \ldots \ldots \quad (15);$$

der Wert des Extremums des Ausdruckes in den eckigen Klammern wird für $\frac{\log \varrho}{i \pi} = \frac{1}{2} \omega_1 = \frac{1}{2} \frac{\log r}{i \pi}$, d. h. für $\varrho = \sqrt{r}$ erreicht und ist nach (12) (wo man $u = \frac{\log r}{2 i \pi}$, $\omega_1 = \frac{\log r}{i \pi}$ und $\omega_2 = 1$ setzt) gleich

$$\frac{-3(-4 \eta_2^3 + g_2 \eta_2 - g_3)}{g_2 - 12 \eta_2^2} - 8 \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n r^n}{1 - r^{2n}} \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Wir bezeichnen wie üblich mit $e_1 < e_2 < e_3$ die Wurzeln der Gleichung $4 x^3 - g_2 x - g_3 = 0$ und erinnern daran, daß $-\eta_2 = \int_{\frac{\omega_1}{2}}^{\frac{\omega_1}{2} + \omega_2} \mathfrak{P}(u) \, du$ ist und daß $\mathfrak{P}(u / \omega_1, \omega_2)$ auf der Strecke $\left(\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_1}{2} + \omega_2 \right)$ zwischen e_1 und e_2 bleibt; daraus folgt nach dem Mittelwertsatz, da $\omega_2 = 1$ ist:

$$e_2 > -\eta_2 > e_1 \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

Der Zähler des ersten Gliedes von (16) nämlich $-3(-4 \eta_2^3 + g_2 \eta_2 - g_3) = -3[4(-\eta_2)^3 - g_2(-\eta_2) - g_3]$ ist nach (17) negativ. Der Nenner von (16) $g_2 - 12 \eta_2^2$ ist für $q = 0$ nach R. Fricke, Elliptische Funktionen, Bd. I, S. 271, Formel (15) und (16) gleich Null; für wachsende q, wächst g_2 auch und η_2 nimmt ab. Der Ausdruck $g_2 - 12 \eta_2^2$ wächst somit bis zu demjenigen Wert von q, für den η_2 gleich Null ist — ist also positiv. Für die Werte von q, für welche $-\eta_2 > 0$ gilt, haben wir um so mehr $e_2 > 0$ und $g_2 - 12 \eta_2^2 > g_2 - 12 e_2^2$.

Da aber $g_2 = -4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) = 4(e_2^2 + e_3^2 + e_2 e_3)$ ist, so bekommt man $g_2 - 12 e_2^2 = 4[(e_3^2 - e_2^2) + (e_2 e_3 - e_2^2)]$ und wegen $e_3 > e_2$ haben wir $g_2 - 12 \eta_2^2 > 0$; der Nenner von (16) ist also im Innern des Intervalls $(r, 1)$ überall positiv.

[7]) R. Fricke: S. 263, Formel (7).

Damit ist gezeigt, daß der Ausdruck (16) negativ ist. Die Ableitung $\frac{d\boldsymbol{I}}{d\varrho}$ wird im Innern von $(r, 1)$ also Null dann und nur dann, wenn $\frac{d\mathfrak{P}}{d\varrho} = 0$, was nur für $\varrho = \sqrt{r}$ stattfindet. Da $\frac{d\boldsymbol{I}}{d\varrho}$ nach (15) dasselbe Vorzeichen wie $\frac{d\mathfrak{P}}{d\varrho}$ hat, besitzt die Funktion $\boldsymbol{I}(z, \bar{z})$ im Intervall $(r, 1)$ ein Maximum.

Da im Kreisringe K_r zwei beliebige Punkte z_1^* und z_2^*, mit $|z_1^*| = |z_2^*|$ stets durch eine konforme Abbildung des K_r auf sich selbst (nämlich durch die Drehung) ineinander übergeführt werden können, so gilt nach dem festgestellten invarianten Charakter der Funktion $\boldsymbol{I}(z, \bar{z})$

$$\boldsymbol{I}(z_1^* \overline{z_1^*}) = \boldsymbol{I}(z_2^* \overline{z_2^*}).$$

Die Funktion $\boldsymbol{I}(z, \bar{z})$ bleibt also konstant auf jedem konzentrischen Kreise in K_r: es genügt, sie nur auf der reellen Achse zu untersuchen; ferner ist sie auch symmetrisch in bezug auf den Punkt r_m in dem Sinne, daß sie gleiche Werte annimmt in den Punkten, die ineinander durch Spiegelung an k_m übergehen.

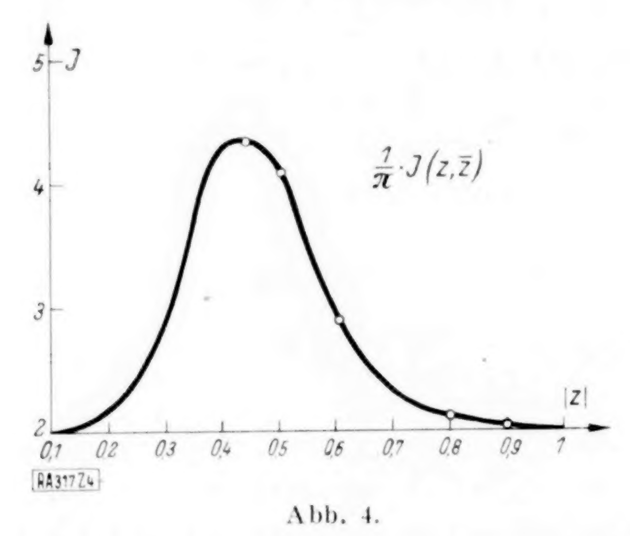


Abb. 4.

$\|z\|$	$\frac{1}{\pi}\cdot\boldsymbol{I}(z,\bar{z})$
$r_m \sim 0{,}45$	4,33
0,5	4,07
0,6	2,61
0,8	2,03
0,9	2,003

Die Abb. 4 gibt den Verlauf der Funktion $\frac{1}{\pi}\boldsymbol{I}(z, \bar{z})$ für $r = 0{,}2$ an.

Man kann also schließen, daß der Ort der Punkte, wo sie einen Wert a (der kein Maximum ihrer Werte ist) annimmt, aus zwei konzentrischen Kreisen besteht und der Ort der Punkte, wo sie ihr Maximum erreicht, genau der Kreis k_m ist.

§ 4. Es sei

$$\varphi_n(z) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

ein normiertes Orthogonalsystem, welches durch Orthogonalisierung (nach Schmidtschem Verfahren) der Potenzen z^n, wobei n alle positive und negative ganze Zahlen, die Zahl $n = -1$ ausgenommen, im abgeschlossenen durch reguläre Kurven berandeten zweifach zusammenhängenden Gebiete G hervorgegangen ist. Wir behaupten, daß das System (18) in bezug auf die Klasse $\mathfrak{K}$ vollständig ist. Greift man eine beliebige Funktion $f(z)$ aus der Klasse $\mathfrak{K}$ heraus, so ist nach Voraussetzung $\psi(z) = \int_{z_1}^{z} f(z)\,dz$ im abgeschlossenen Gebiete G eindeutig und regulär; dann ist sie auch von derselben Eigenschaft in einem offenen Gebiete G', welches das abgeschlossene Gebiet G in sich enthält. Es sei noch G'' ein abgeschlossenes durch zwei reguläre Kurven L berandetes Gebiet, welches in G' liegt und das abgeschlossene Gebiet G im Innern enthält; ferner sei die kleinste positive Entfernung zwischen den Rändern von G und G'' mit ϱ bezeichnet.

Die Funktion $\psi(z)$ kann nach dem Rungeschen Satze[8]) in G'' durch ein Polynom $P_k(z)$ (in ganzen positiven und negativen Potenzen von z) beliebig genau approximiert werden. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein solches Polynom $P_k(z)$, so daß

$$|\psi(z) - P_k(z)| \leq \eta = \frac{\varepsilon \cdot \varrho^2}{\text{Länge von } L}$$

im abgeschlossenen Gebiete G'' gilt. Dann folgt im Gebiete G, nach dem Cauchyschen Satze

$$|f(z) - P_k'(z)| \leq \int_L \left|\frac{\psi(\zeta) - P_k(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\right| ds \leq \frac{\eta}{\varrho^2} \cdot \text{Länge von } L = \varepsilon,$$

[8]) C. Runge: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Acta Math. 6, S. 229, 1884.

wobei die Ableitung $P_k'(z)$ das Glied mit z^{-1} nicht mehr enthält. Drückt man alle Potenzen von z, welche in $P_k'(z)$ vorkommen, linear durch die Orthogonalfunktionen $\varphi_n(z)$ aus, so bekommt man eine in $\varphi_n(z)$ lineare Form $\Sigma \beta_n \varphi_n(z)$ von der Art, daß

$$|f(z) - \Sigma \beta_n \cdot \varphi_n(z)| < \varepsilon$$

im abgeschlossenen Gebiete G gilt, woraus man weiter wie bei (9) schließt, daß das System (18) vollständig ist.

Setzt man also

$$K(z, \bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}{}' \varphi_n(z) \cdot \overline{\varphi_n(z)},$$

so erhält man die Kernfunktion für das Gebiet G. Ist das Gebiet G gegeben, so sind die Funktionen (18) berechenbar und können die Funktionen $K(z, \bar{z})$ und $\boldsymbol{I}(z, \bar{z})$ als bekannte Funktionen angesehen werden.

§ 5. Sei γ ein beliebiger Bogen des Kreises k_m. Die nichteuklidische Länge $\boldsymbol{N}_K(\gamma)$ von γ (in bezug auf den Kreisring K) läßt sich leicht ausrechnen, in den man $z = r_m e^{i\varphi} = \sqrt{r}\, e^{i\varphi}$ einsetzt. Es gilt nach (M) und (10)

$$\boldsymbol{N}_K(\gamma) = \boldsymbol{E}(\gamma) \sqrt{\frac{r}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{(n+1)\, r^n}{1 - r^{2(n+1)}}},$$

wo $\boldsymbol{E}(\gamma)$ die „euklidische" Länge von γ bedeutet. Für $\boldsymbol{N}_K(\gamma)$ erhält man insbesondere

$$\boldsymbol{N}_K(k_m) = \sqrt{4\pi r} \sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{(n+1)\, r^n}{1 - r^{2(n+1)}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19).$$

Sei a_0 das Maximum von $\boldsymbol{I}(z, z)$. Die Kurve

T_{a_0}: $\boldsymbol{I}(z, \bar{z}) = a_0$

ist das Bild von k_m, denn die Invariante $\boldsymbol{I}$ ist, wie oben gezeigt, in bezug auf k_m symmetrisch und besitzt (betrachtet als Funktion von r) ein einziges Maximum. Da die nichteuklidische Länge invariant ist, so gilt

$$\boldsymbol{N}_K(k_m) = \boldsymbol{N}_G(T_{a_0}), \quad \text{d. h.} \sqrt{4\pi r} \sqrt{\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{(n+1)\, r^n}{1 - r^{2(n+1)}}} = \boldsymbol{N}_G(T_{a_0}).$$

Da man nun bei gegebenen G die nichteuklidische Länge $\boldsymbol{N}_G(T_{a_0})$ effektiv ausrechnen kann, erhält man in den letzten Beziehungen eine transzendente Gleichung für r. Da $r < 1$, (19) monoton ist, besitzt diese Gleichung nur eine reelle Lösung.

T_a: $\boldsymbol{I}(z_1 z_2) = a, \quad a = \text{const} \qquad 2\pi \leq a < a_0$

besteht aus zwei zusammenhängenden Kurven, sie sind die Bilder von zwei konzentrischen Kreisen von K_r, die durch Spiegelung um k_m ineinander übergehen,

Die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar T_a bezeichnen wir mit S_β; sie sind die Bilder der Radien des Kreisringes K. Durch einen festen Punkt z von G geht offenbar eine einzige Kurve T_a und eine einzige Kurve S_β; wir bezeichnen sie zur Abkürzung: $T(z)$ bzw. $S(z)$.

Wir wollen nun gewisse krummlinigen Koordinaten in K_r definieren. Wir wählen einen beliebigen Radius ϱ und halten ihn von nun an fest. Den Schnittpunkt von ϱ und k_m bezeichnen wir mit Q. Sei ein beliebiger Punkt P von K_r gegeben, den wir durch einen zu den Randkreisen konzentrischen Kreis mit ϱ verbinden und bezeichnen mit P' den Schnittpunkt dieses Kreises mit ϱ. Als die neuen Koordinaten (u, v) von P definieren wir

$$u = \boldsymbol{N}_K(\widehat{PP'}), \qquad v = \boldsymbol{N}_K(\widehat{P'Q}),$$

wobei $\widehat{PP'}$ den von den Punkten P und P' berandeten Kreisbogen, $\widehat{P'Q}$ die von P' und Q berandete Strecke auf ϱ bedeutet.

(Die dabei auftretende Zweideutigkeit vermeidet man durch die Einführung von zweckmäßigen üblichen Festsetzungen!)

Da nun in dem gegebenen Gebiete G die Rolle der Radien und den konzentrischen Kreisen die Kurven S_β und T_a spielen und die nichteuklidischen Längen invariant sind, kann man die Koordinaten u und v dadurch erhalten, daß man die nichteuklidischen Längen (in bezug auf G) der entsprechenden Kurvenstücke (Bilder von $\widehat{PP'}$ und $\widehat{P'Q}$) berechnet.

Somit gewinnen wir in K_r und G Koordinatensysteme, bei denen die bei einer konformen Abbildung einander entsprechenden Punkte von K_r und G die gleichen Koordinaten haben, wodurch die konforme Abbildung von G auf K_r hergestellt ist.

§ 6. In dem vorliegenden Paragraphen wollen wir an Hand eines Beispiels den Verlauf der praktischen Auswertung unseres Verfahrens skizzieren. Wir wählen dabei einen besonders einfachen nur von einem Parameter abhängigen Querschnitt, nämlich eines Quadraten mit der Seitenlänge 2, aus welchem ein anderes Quadrat mit der Seitenlänge $2a$ ausgeschnitten ist. Wir wählen diesen Querschnitt, da es sich mehr um eine Illustration des Verfahrens, als um die wirkliche Berechnung handelt.

Um die normierten Orthogonalfunktionen zu berechnen, benutzen wir die Formeln aus G. Kowalewski, Integralgleichungen, S. 253:

$$F_n(z) = \frac{1}{\sqrt{A_{n-1}\cdot A_n}} \cdot \begin{vmatrix} (f_1 f_1), & \ldots\ldots\ldots & (f_1 f_n) \\ - & - - - - - - - & - \\ (f_{n-1} f_1), & \ldots\ldots & (f_{n-1} f_n) \\ f_1(z), & \ldots\ldots\ldots\ldots & f_n(z) \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

wo $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... $f_n(z)$, ... die zu orthogonalisierenden gegebenen Funktionen,

$$A_0 = 1 \quad \text{und} \quad A_n = \begin{vmatrix} (f_1 f_1), & \ldots\ldots\ldots & (f_1 f_n) \\ - & - - - - - - - & - \\ (f_n f_1), & \ldots\ldots\ldots & (f_n f_n) \end{vmatrix}$$

sind, und $(f_n f_k)$ die über gegebenem Gebiet erstreckten Integrale $\iint f_n(z)\cdot\overline{f_k(z)}\,d\omega$ bedeuten.

In unserem Falle sind die gegebenen Funktionen

$$1,\ z,\ z^2,\ \frac{1}{z^2},\ z^3,\ \frac{1}{z^3},\ z^4,\ \frac{1}{z^4},\ \ldots\ldots$$

Man muß also die über unserem Gebiet genommenen Integrale der Gestalt

$$I_{\alpha,\beta} = \iint (x+iy)^\alpha (x-iy)^\beta\, dx\, dy \quad (\alpha, \beta \text{ — ganze Zahlen})$$

berechnen. Führt man die Transformation $x = -y'$; $y = x'$ (Drehung um 90°) ein, so ist

$$I_{\alpha,\beta} = (-1)^\beta \cdot i^{\alpha+\beta} \cdot I_{\alpha,\beta} \qquad \text{oder} \qquad I_{\alpha,\beta} = i^{\alpha+3\beta}\cdot I_{\alpha,\beta},$$

woraus schließt man, daß $I_{\alpha,\beta}$ nur dann von Null verschieden sein kann, wenn $i^{\alpha+3\beta} = +1$ ist, d. h. wenn $\alpha + 3\beta$ durch 4 teilbar ist.

Beschränkt man sich auf die vierten Potenzen von z, so sind die nichtverschwindenden Integrale $I_{\alpha,\beta}$ in der Tabelle enthalten:

$I_{0,0} = 4(1-a^2)$	$I_{-2,-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)(2+\pi)$
$I_{0,4} = -\frac{16}{15}(1-a^6)$	$I_{3,3} = \frac{96}{35}(1-a^8)$
$I_{0,-4} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)$	$I_{-3,-3} = \frac{1}{16a^4}(1-a^4)(8+3\pi)$
$I_{1,1} = \frac{4}{3}(1-a^4)$	$I_{4,4} = \frac{5312}{2175}(1-a^{10})$
$I_{2,2} = \frac{112}{45}(1-a^6)$	$I_{4,-4} = \frac{4}{3}(1-a^2)(19-6\pi)$
$I_{2,-2} = 4(1-a^2)(3-\pi)$	$I_{-4,-4} = \frac{1}{144a^6}(1-a^6)(44+15\pi)$.

Die Formel (20) ergibt dann das normierte Orthogonalsystem:

$$\frac{1}{2\sqrt{1-a^2}},\quad \frac{z\sqrt{3}}{2\sqrt{1-a^4}},\quad \frac{\sqrt{45}\cdot z^2}{\sqrt{112(1-a^6)}},\quad \frac{-(1-a^2)(3-\pi)z^2 + \frac{1}{z^2}\cdot\frac{28}{45}(1-a^6)}{\sqrt{\frac{7}{45}(1-a^6)}},\ \ldots\ldots$$

Mit Hilfe dieser Funktionen sind $K(z,\bar{z})$ und $\boldsymbol{I}(z,\bar{z})$ für unser Gebiet berechenbar. 317

Bewegung eines Wirbels in geradlinig begrenzten Gebieten.

Von *Erwin Paul* in Dresden.

Einleitung.

Ziel der Untersuchung. Die Untersuchungen über die Bewegung isolierter Wirbel in der Ebene stützen sich in der Regel auf den Helmholtz-Kirchhoffschen Grundsatz, daß die Bewegung jedes einzelnen Wirbels nicht von seinem eigenen Strömungsfeld beeinflußt wird, daß sich vielmehr jeder Wirbelpunkt wie ein regulärer Punkt der nach Wegnahme seines eigenen Strömungsfeldes verbleibenden Strömung bewegt. Die von Kirchhoff[1]) im Anschluß an Helmholtz durchgeführten Untersuchungen über die Bahnen isolierter Wirbel beschränken sich allerdings auf den Fall, daß die Wirbelbewegung in der unbegrenzten Ebene stattfindet, und daß sich die Flüssigkeit, abgesehen von der Bewegung, welche die in ihr enthaltenen Wirbel hervorrufen, in Ruhe befindet; sie lassen sich aber, wie Lagally[2]) gezeigt hat, auf den Fall erweitern, daß der Bewegung der isolierten Wirbel noch eine beliebige Potentialströmung mit festen oder beweglichen Singularitäten überlagert ist. Diese Erweiterung ist deshalb von Wichtigkeit, weil sie es ermöglicht, die Bewegung isolierter Wirbel auch in einem begrenzten Gebiete zu untersuchen; man kann nämlich von der Bewegung eines Wirbelpunktes in einer unbegrenzten Ebene zu einer Bewegung in einem begrenzten Gebiete T dadurch übergehen, daß man der von dem Wirbel hervorgerufenen Bewegung eine im Inneren von T reguläre, mit der Zeit veränderliche Potentialströmung überlagert, welche die Normalkomponente der Gesamtbewegung an der Begrenzung von T zum Verschwinden bringt. Hierzu ist im allgemeinen die Lösung einer Randwertaufgabe der Potential-Theorie nötig.

Routh[3]) hat ein Verfahren angegeben, auf Grund dessen die Methode der konformen Abbildung zur Lösung dieser Randwertaufgabe nutzbar gemacht werden kann. Bildet man ein Gebiet T_0 mit der komplexen Veränderlichen $\zeta = \xi + i\,\eta$ durch die Funktion

$$\zeta = f(z) \qquad \text{(a)}$$

schlicht auf ein Gebiet T mit der komplexen Veränderlichen $z = x + i\,y$ ab, so geht bekanntlich jede in T_0 vorhandene Potentialströmung mit dem komplexen Potential $\Omega_0(\zeta)$ in eine Potentialströmung $\Omega_0(f(z)) = \Omega(z)$ in T über. Bei dieser Abbildung werden auch die singulären Stellen der Strömung $\Omega_0(\zeta)$ in die singulären Stellen der Strömung $\Omega(z)$ übergeführt; insbesondere geht ein in T_0 an der Stelle $\gamma = a + i\,\beta$ gelegener Wirbel in einen in T an der Stelle $c = a + i\,b$ gelegenen Wirbel über, wobei $\gamma = f(c)$ ist, und unter den diese Gleichung erfüllenden Werten von c derjenige zu nehmen ist, der in das Gebiet T fällt (Abb. 1). Aber die Bahn eines Wirbels in T_0 wird durch die konforme Abbildung nicht in die Bahn seines Bildwirbels in T übergeführt.

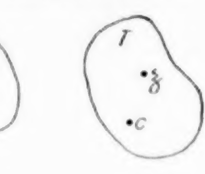


Abb. 1.

Die hierin liegende Schwierigkeit wird durch das Routhsche Verfahren überwunden. Erstens bewegt sich jeder freie Wirbelpunkt in einer im übrigen wirbelfreien Strömung wie ein regulärer Punkt einer gewissen nicht wirbelfreien Hilfsströmung; die Komponenten seiner Bahngeschwindigkeit sind also durch die Differentialquotienten einer Stromfunktion, der „Routhschen Stromfunktion" darstellbar, etwa:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,a}{d\,t} &= \frac{\partial\,\chi_0}{\partial\,\beta} \\ \frac{d\,\beta}{d\,t} &= -\frac{\partial\,\chi_0}{\partial\,a} \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} \frac{d\,a}{d\,t} &= \frac{\partial\,\chi}{\partial\,b} \\ \frac{d\,b}{d\,t} &= -\frac{\partial\,\chi}{\partial\,a} \end{aligned}\right| \qquad \text{(b)},$$

zweitens besteht zwischen den Routhschen Stromfunktionen χ_0 und χ in den konform aufeinander abgebildeten Gebieten T_0 und T die Beziehung:

$$\chi = \chi_0 - \frac{\mu}{2} \lg |f'(c)| \qquad \text{(c)},$$

wobei μ die Wirbelstärke bedeutet, und in χ mittels der Abbildungsfunktion (a) a und β durch a und b zu ersetzen sind.

Ist in T_0 bzw. T nur ein einziger Wirbel vorhanden, so gibt $\chi_0 = \text{const}$, bzw. $\chi = \text{const}$ die Wirbelbahn. Man kann also, ausgehend von Gebieten, in denen die Bahn eines einzelnen

[1]) Kirchhoff: Vorlesungen über math. Physik, Mechanik, S. 255 ff.
[2]) M. Lagally: Über ein Verfahren zur Transformation ebener Wirbelprobleme, Math. Z., 10, 1921, S. 231 ff.
[3]) E. J. Routh: Some Applications of Conjugate Functions, Proc. London Math. Soc., 12 (1880 bis 81), S. 73 bis 88.

Wirbels einer direkten Bestimmung zugänglich ist, mit Hilfe der konformen Abbildung, ohne Integration einer Differentialgleichung, auch in weniger einfachen Gebieten die Bahn eines einzelnen Wirbels bestimmen (vgl. z. B.)[4]).

Im folgenden soll die Bewegung eines einzelnen Wirbels in Gebieten untersucht werden, die aus der unendlich ausgedehnten Ebene durch Einziehen geradliniger Schnitte hervorgehen, die von dem Wirbel nicht überschritten werden dürfen und an denen die Normalkomponente der Geschwindigkeit der Strömung verschwindet, und zwar werden folgende drei Fälle behandelt:

1. Wirbelbewegung um eine einseitig ins Unendliche reichende ebene Wand,
2. Wirbelbewegung durch eine Lücke einer beiderseits ins Unendliche reichenden ebenen Wand,
3. Wirbelbewegung um eine ebene Wand von endlicher Länge (Platte).

Die Bewegung eines Wirbels in derartigen Gebieten wurde seinerzeit von Lagally[5]) unter zusätzlichen Voraussetzungen behandelt, die von dem Helmholtz-Kirchhoffschen Grundsatz abweichen und ihm widersprechen. Daß derartige Zusatzannahmen überflüssig sind, wurde bereits in der zitierten Abhandlung[2]) erkannt, auf die genannten Beispiele aber nicht eingegangen. Diese Beispiele wurden vielmehr zuerst von W. Barth[6]) unter Verwendung des Helmholtz-Kirchhoffschen Grundsatzes, und kurze Zeit darauf von Bonder und Neumark[7]) auch unter Verwendung der Routhschen Methode behandelt. Neuerdings ist es Lichtenstein[8]) gelungen, den Helmholtz-Kirchhoffschen Grundsatz unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen zu beweisen.

Es ist besonders hervorzuheben, daß das Problem der Bewegung eines Wirbels in der aufgeschnittenen Ebene außer von der Intensität des Wirbels und den Größen, die die geometrischen Verhältnisse bestimmen, noch von einer kinematischen Konstanten abhängt, die die Strömung bestimmt, die nach Wegnahme des freien Wirbels übrigbleibt. Diese Konstante kann im Falle der Platte durch die Zirkulation der überlagerten Strömung definiert werden; in den beiden anderen Fällen muß sie durch den Wert der Geschwindigkeit festgelegt werden, welche die überlagerte Strömung an einer bestimmten Stelle des Feldes besitzt. Sowohl Barth als auch Bonder und Neumark sehen von dieser Konstanten ab, beziehentlich legen ihr einen festen Wert bei; der folgenden Untersuchung ist das Ziel gesetzt, die Gesamtheit aller möglichen Bewegungen bei beliebiger Wahl der Konstanten zu diskutieren.

I. Wirbelbewegung um eine einseitig ins Unendliche reichende ebene Wand.

Die Funktion $\zeta = f(z) = \sqrt{z}$ gibt die Abbildung der Ebene ζ auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit einem Verzweigungspunkt im Nullpunkt und einem zweiten im unendlich fernen Punkt. Die positive Halbebene, von der unsere Betrachtungen ausgehen, wird auf das obere Blatt der Riemannschen Fläche, die längs der positiven x-Achse aufgeschnitten wird, abgebildet.

Für den Gang der späteren Rechnung ist es vorteilhaft, in der Riemannschen Fläche Polarkoordinaten einzuführen. Es gelten dann folgende Beziehungen, die später gebraucht werden:

$$f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \qquad |f'(z)| = \frac{1}{2\sqrt{r}} \qquad a + i b = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \qquad \alpha + i\beta = r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

a) Wirbelbewegung in ruhender Flüssigkeit. Nach der zitierten Arbeit von Lagally[2]) ist die Routhsche Stromfunktion in der oberen Halbebene:

$$\chi_0 = \frac{\mu}{2} \lg \beta ,$$

also in einem Gebiet, in das die obere Halbebene konform abgebildet wird:

$$\chi = \frac{\mu}{2} \lg \frac{\beta}{|f'(c)|} .$$

[4]) A. Kneschke: Über die Bewegung von Wirbeln in einem einseitig begrenzten Kanal, Ann. Physik, 14, 1932, S. 655 bis 666. — A. Kneschke u. S. Matthes: Wirbelbewegung um einen Kreiszylinder, Ann. Physik, 9, 1931, S. 916 bis 920.

[5]) M. Lagally: Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit, S.-B. Bayer. Akad. Wiss., 1914, S. 377 bis 432.

[6]) W. Barth: Wirbelbahnen um Wände und Platten von unendlich kleiner Wandstärke, Z. angew. Math. u. Mech., 10, 1931, S. 247 bis 251.

[7]) J. Bonder u. S. Neumark: Einige Bemerkungen zu der Abhandlung „Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit" von M. Lagally, Math. Z., 32, 1930, S. 600 bis 604. Vgl. auch M. Lagally: Bemerkungen zu vorstehender Note der Herren Bonder und Neumark, daselbst S. 605 bis 607.

[8]) L. Lichtenstein: Eine Begründung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie geradliniger Wirbelfäden, Math. Z., 32, 1930, S. 633 bis 640.

woraus man nach (b) durch Differentiation die Komponenten der Geschwindigkeit:

$$u = \frac{d\,a}{d\,t} = \frac{\partial \chi}{\partial b}; \qquad v = \frac{d\,b}{d\,t} = -\frac{\partial \chi}{\partial a}$$

erhält. Also ist die Routhsche Stromfunktion in der aufgeschnittenen Ebene:

$$\chi = \frac{\mu}{2} \lg \left(2\,r \sin \frac{\varphi}{2}\right)$$

und die Gleichung der Wirbelbahn:

$$\frac{\mu}{2} \lg \left(2\,r \sin \frac{\varphi}{2}\right) = C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

In unendlicher Entfernung von der Kante der einseitig begrenzten Wand wird sich der Wirbel parallel zu ihr bewegen und nicht von der Begrenzung der Wand im Endlichen beeinflußt werden. Es ist deshalb zweckmäßig, die Konstante C durch den Wirbelabstand A von der Wand im Unendlichen festzulegen.

Aus $$A = \lim_{\substack{r \to \infty \\ \varphi = 0}} (r \sin \varphi)$$

erhält man nach (1) die Gleichung der Bahnkurve in der Gestalt:

$$r \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\, e^{\frac{2C}{\mu}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Man sieht hieraus, daß der Wirbel für $\varphi = \pi$ im Abstande $r_0 = \frac{A}{2}$ die Polarachse passiert mit den Geschwindigkeiten:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial \chi}{\partial b}\Big|_{\varphi = \pi} = 0 \\ v &= -\frac{\partial \chi}{\partial a}\Big|_{\substack{\varphi = \pi \\ r = r_0}} = \frac{\mu}{2\,r_0} = \frac{\mu}{A}. \end{aligned} \right.$$

Damit ist die Wirbelbahn hinreichend bestimmt. Zu beiden Seiten der Wand verläuft sie asymptotisch im Abstande A von ihr (Abb. 2). Der Wirbel läuft an der oberen Seite der Wand in Richtung der positiven x-Achse ins Unendliche, wenn μ positiv ist.

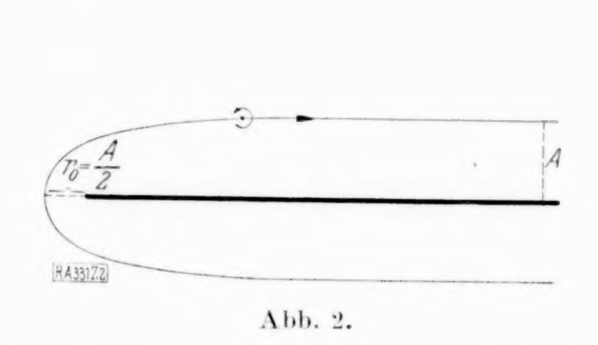


Abb. 2.

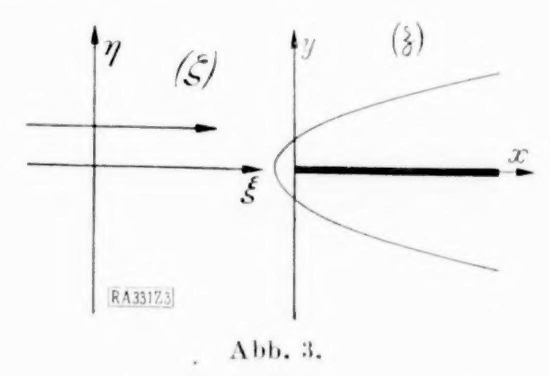


Abb. 3.

b) Wirbelbewegung in strömender Flüssigkeit. Die ebene Translationsströmung der (ζ) Ebene mit der Stromfunktion $\psi_0(\xi\,\eta) = u_0\,\eta$ wird durch die Abbildungsfunktion $\zeta = f(z) = \sqrt{z}$ übergeführt in eine Strömung der (z) Ebene mit der Stromfunktion:

$$\psi = u_0\, r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

wobei unter u_0 zunächst die Strömungsgeschwindigkeit in der Bild (T_0)-Ebene zu verstehen ist. Die Stromkurven der (z)-Ebene stellen eine Schar konfokaler Parabeln mit dem Koordinatenursprung als Brennpunkt dar. Die Strömung soll so normiert werden, daß sie an der oberen Seite der Wand in positiver Richtung ins Unendliche geht; dazu ist $u_0 > 0$ zu setzen; $r^{1/2}$ ist stets positiv zu rechnen (Abb. 3).

Als Geschwindigkeiten ergeben sich:

$$u = \frac{u_0}{2}\, r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \qquad\qquad v = \frac{u_0}{2}\, r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Im unendlich Fernen ruht die Flüssigkeit, beim Durchgang durch die x-Achse besteht nur die v-Komponente der Geschwindigkeit $v\Big|_{\substack{r=r_0\\ \varphi=\pi}} = \frac{u_0}{2} r_0^{-\frac{1}{2}}$, während beide Geschwindigkeiten am Ende der Wand ($r=0$) unendlich groß werden.

Nunmehr läßt sich u_0 auch deuten als die Geschwindigkeit der Flüssigkeit beim Durchgang durch die x-Achse im Abstande $r_0 = \frac{1}{4}$ vom Ende der Wand: $v\Big|_{\substack{\varphi=\pi\\ r_0={}^1/_4}} = u_0$.

Die Bewegung eines Wirbels in einer strömenden Flüssigkeit läßt sich aus einer Routhschen Stromfunktion herleiten, welche die Summe aus der Routhschen Stromfunktion des Wirbels in ruhender Flüssigkeit und der gewöhnlichen Stromfunktion der Strömung ist. Es läßt sich also aus der Routhschen Stromfunktion:

$$\chi = \psi + \frac{\mu}{2} \lg \frac{\beta}{|f'(c)|}$$

die Gleichung der Bahnkurve des Wirbels in strömender Flüssigkeit aufstellen:

$$u_0 r^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{\mu}{2} \lg\left(2 r \sin\frac{\varphi}{2}\right) = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Je nach dem Vorzeichen von u_0 und μ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

aa) $u_0 > 0; \quad \mu > 0$.

Der Wirbel wird sich mit der strömenden Flüssigkeit bewegen, also an der oberen Seite der Wand in Richtung der positiven x-Achse (Abb. 4).

Wenn wir die Konstante C wiederum durch den Wirbelabstand A von der Wand im Unendlichen festlegen, so ergibt der Grenzübergang: $A = \lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ \varphi=0}} (r \sin\varphi)$ in Gl. (4): $A = e^{\frac{2}{\mu} C}$,

so daß wir die Bahngleichung schreiben können:

$$u_0 r^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{\mu}{2} \lg\left(2 r \sin\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\mu}{2} \lg A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Für $\varphi = \pi$, $r = r_0$ ergibt sich aber hieraus:

$$u_0 r_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{2} \lg 2 r_0 = \frac{\mu}{2} \lg A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Also läßt sich A auch folgendermaßen ausdrücken:

$$A = 2 r_0 e^{\frac{2 u_0}{\mu} \sqrt{r_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Die Bahnkurve schneidet die x-Achse nur in einem Punkt. Wären zwei Schnittpunkte vorhanden, so müßte zwischen ihnen ein Punkt liegen, an dem der Differentialquotient der linken Seite von (6) verschwindet, also $\frac{1}{2} u_0 r_0^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{2 r_0} = 0$.

Diese Gleichung hat für $r^{1/2} > 0$ keine Wurzel, wenn u_0 und μ gleiche Vorzeichen tragen. Die Geschwindigkeitskomponenten sind:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \chi}{\partial b} = \frac{u_0}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{\varphi}{2} + \frac{\mu}{2r} \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} + \frac{\mu}{4r} \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \\ v &= -\frac{\partial \chi}{\partial a} = \frac{u_0}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{\mu}{2r} \sin^2\frac{\varphi}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Daraus errechnen sich die Geschwindigkeiten an den Stellen $\varphi = 0, \pi, 2\pi$ zu:

$$\left\{\begin{aligned} u\Big|_{\substack{r\to\infty\\ \varphi=0}} &= \frac{\mu}{4 r_0 e^{\frac{2 u_0}{\mu} \sqrt{r_0}}} \\ v\Big|_{\substack{r\to\infty\\ \varphi=0}} &= 0 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} u\Big|_{\substack{r=r_0\\ \varphi=\pi}} &= 0 \\ v\Big|_{\substack{r=r_0\\ \varphi=\pi}} &= \frac{u_0}{2 r_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{\mu}{2 r_0} \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} u\Big|_{\substack{r\to\infty\\ \varphi=2\pi}} &= -\frac{\mu}{4 r_0 e^{\frac{2 u_0}{\mu} \sqrt{r_0}}} \\ v\Big|_{\substack{r\to\infty\\ \varphi=2\pi}} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Wir erkennen, daß der Wirbel aus dem Unendlichen mit endlicher Geschwindigkeit kommt, die x-Achse senkrecht in positiver Richtung nach oben schneidet und auf der anderen Seite der Wand ins Unendliche zurückläuft.

Die Frage, ob die Wirbelbahnen an irgendwelchen Stellen horizontale Tangenten besitzen, ob also $\frac{d\,b}{d\,a} = -\frac{\frac{\partial \chi}{\partial a}}{\frac{\partial \chi}{\partial b}}$ verschwindet, muß verneint werden; denn wir erkennen aus (8), daß für $0 < \varphi < 2\pi$ stets $v \neq 0$ ist, während den Grenzen dieses Intervalls $\varphi = o$ und $\varphi = 2\pi$ die Asymptoten entsprechen.

Es sei noch untersucht, ob Ruhepunkte existieren. Als Bedingung dafür müssen beide Geschwindigkeitskomponenten verschwinden, also:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial b} &= \frac{u_0}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos\frac{\varphi}{2} + \frac{\mu}{2r} \cos\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\right) = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial a} &= -\frac{u_0}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2} - \frac{\mu}{2r} \sin^2\frac{\varphi}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9).$$

Durch Elimination von $\frac{u_0}{\mu}$ folgt

$$r^{-\frac{3}{2}} \cos\frac{\varphi}{2} = 0, \text{ also } \varphi = \pi .$$

Dann folgt aus (9)

$$\mu + u_0 \sqrt{r_0} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

Für den Fall: $u_0 > o$, $\mu > o$ ist ein Ruhepunkt nicht vorhanden. (Abb. 4).

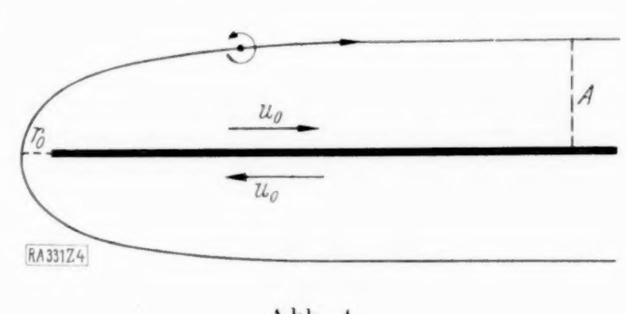


Abb. 4.

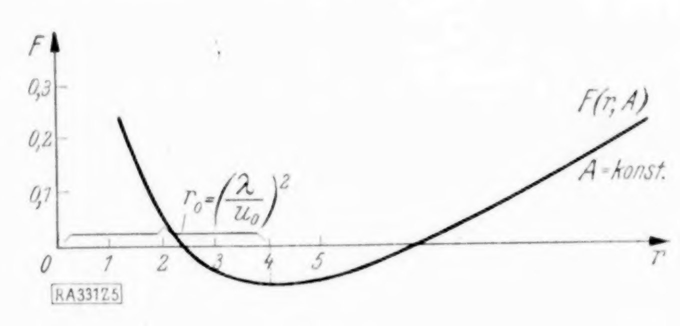


Abb. 5.

bb) $u_0 > 0$, $\mu < 0$.

Weit interessanter gestalten sich die Bahnkurven, wenn die Richtung, in der der Wirbel fortschreitet, entgegengesetzt ist derjenigen, in der die Flüssigkeit strömt. Ersetzen wir μ durch $-\lambda$, wobei λ positiv ist, dann lautet die Gleichung der Bahnkurve:

$$u_0 r^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2} - \frac{\lambda}{2} \lg\left(2r\sin\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{\lambda}{2} \lg A .$$

Gl. (6) für die Schnittpunkte mit der x-Achse geht über in:

$$u_0 r_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{2} \lg 2r_0 + \frac{\lambda}{2} \lg A = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11).$$

Diese Gleichung lösen wir graphisch, indem wir die Schnittpunkte der Kurve

$$F(r) = u_0 r^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{2} \lg 2r + \frac{\lambda}{2} \lg A$$

mit der Abszissen-Achse (r-Achse) aufsuchen.

Es sind drei Fälle zu unterscheiden; je nachdem $F_{\text{extrem}} \gtreqless 0$ ist, schneiden die Wirbelbahnen die Polar-Achse gar nicht, einmal in einem Doppelpunkt oder zweimal. Die Abszisse von F_{extrem} ist $r_0 = \left(\frac{\lambda}{u_0}\right)^2$ (Abb. 5).

Bei festem λ und u_0 gibt es also nur eine einzige Bahn, die nur einen (doppelt zählenden) Durchgang durch die x-Achse aufweist; seine Abszisse ist $r_0 = \left(\frac{\lambda}{u_0}\right)^2$. Der dazugehörige Wirbel kommt aus dem Unendlichen mit dem Abstande $A = 2\left(\frac{\lambda}{u_0\, e}\right)^2$ von der Wand.

Gleichzeitig erkennen wir, daß an diesem Punkte $r_0 = \left(\frac{\lambda}{u_0}\right)^2$ der Wirbel ruht. Wie durch Gl. (10) nachgewiesen ist, ist dies die einzige in Frage kommende Ruhestelle überhaupt. Die Gleichung dieser Bahnkurve lautet dann:

$$u_0\, r^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2} - \frac{\lambda}{2} \lg\left(2\, r \sin\frac{\varphi}{2}\right) = \lambda - \lambda \lg\left(\frac{\lambda\sqrt{2}}{u_0}\right).$$

Da u und v an der Stelle $\varphi = \pi$ verschwinden, muß die Kurve daselbst eine Singularität aufweisen. Diesen singulären Punkt erkennen wir als Doppelpunkt, denn die Diskriminante an dieser Stelle ist größer als Null:

$$\chi_{ab}^2 - \chi_{aa}\, \chi_{bb} = \frac{u_0}{32}\, r_0^{-3} > 0.$$

Die zugehörigen Tangentenrichtungen errechnen sich zu $\pm\sqrt{2}$, sind also unabhängig von λ und u_0.

Für $A > 2\left(\frac{\lambda}{u_0\, e}\right)^2$ hat die Bahnkurve keinen Schnittpunkt mit der x-Achse gemeinsam; die Kurven zerfallen in zwei zur x-Achse symmetrische Äste.

Für $A < 2\left(\frac{\lambda}{u_0\, e}\right)^2$ hat die Bahnkurve zwei Schnittpunkte mit der x-Achse; sie zerfällt in zwei Äste, deren jeder für sich zur x-Achse symmetrisch ist. Aus den Ausdrücken für die Geschwindigkeitskomponenten erkennt man, daß alle Durchgänge durch die x-Achse in senkrechter Richtung erfolgen, ausgenommen die eine Singularität.

Fragen wir schließlich nach den Punkten, in denen die Geschwindigkeit v in Richtung der y-Achse Null wird, also:

$$\frac{u_0}{2}\, r^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2} - \frac{\lambda}{2\, r} \sin\frac{2\varphi}{2} = 0,$$

so ergibt sich als geometrischen Ort für alle Punkte mit verschwindendem v die Kardioide:

$$r^{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{u_0} \sin\frac{\varphi}{2} \quad \text{. . . . . (12).}$$

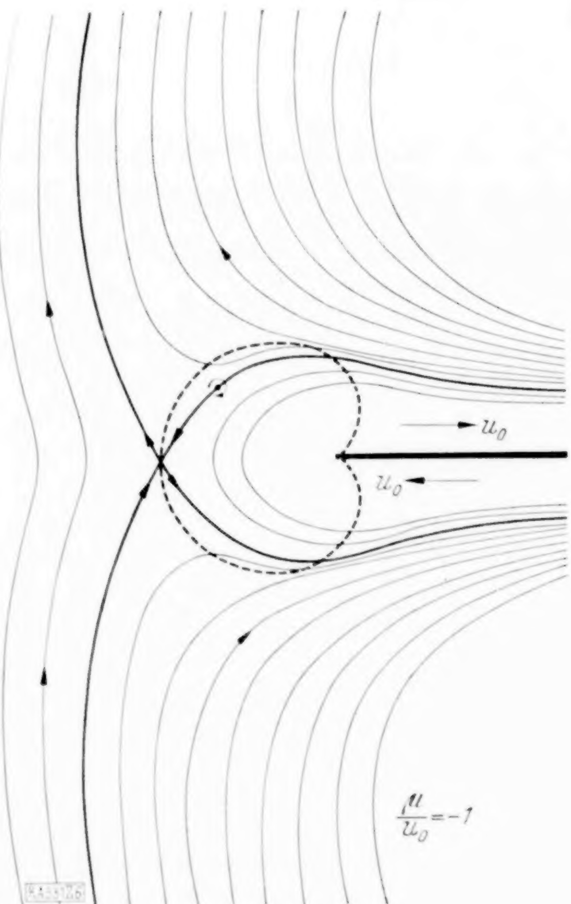


Abb. 6.

Da nur für $r = \left(\frac{\lambda}{u_0}\right)^2$ auch u gleichzeitig verschwindet, so gibt uns mit Ausnahme dieses einen Falles die Gl. (12) den geometrischen Ort für alle die Punkte, in denen die Wirbelbahnen horizontale Tangenten besitzen.

In Abb. (6) sind die Wirbelbahnen für das Verhältnis $\frac{\lambda}{u_0} = -1$ gezeichnet. Dabei lassen sich folgende Bahntypen erkennen:

1[a]) Wirbel mit nur kleinem Abstand von der Wand $\left(A < 2\left(\frac{\lambda}{u_0\, e}\right)^2\right)$ biegen, aus dem Unendlichen kommend, kurz vor dem Ende der Wand noch einmal aus, umlaufen sie dann und wandern ins Unendliche zurück.

1[b]) Die noch verbleibenden Äste der Kurven 1) besitzen keine Asymptoten. Ein sich dort befindender Wirbel wird wegen der großen Entfernung vom Hindernis von diesem nur wenig in seiner Bahn beeinflußt.

2) Für $A > 2\left(\frac{\lambda}{u_0\, e}\right)^2$ werden die Wirbel, ohne die x-Achse zu schneiden, umbiegen und nach dem Unendlichen abwandern, oder sie kommen auf der negativen Seite der Ebene aus dem Unendlichen und nähern sich der Wand asymptotisch.

Beide Bahngebiete 1) und 2) werden von der Doppelpunktskurve getrennt.

II. Wirbelbewegung durch eine Lücke von der Breite $2d$.

Die Abbildung der oberen Halbebene $\zeta = \xi + i\eta$ auf eine Vollebene $z = x + iy$, die längs der außerhalb der Strecke $-d < x < +d$ gelegenen Teile der x-Achse aufgeschnitten ist, setzt sich in der Hauptsache zusammen aus der schon oben verwendeten Abbildung: $\zeta = \sqrt{z'}$ und einer Inversion:

$$z' = 2d\frac{z+d}{z-d}.$$

Sie lautet demnach:

$$\zeta = \sqrt{2d}\sqrt{\frac{z+d}{z-d}},$$

wobei wieder der positiven Halbebene ζ das obere Blatt der Riemannschen Fläche $\mathfrak{z}$ entsprechen soll. Eine Strömung in dieser Ebene kann die x-Achse nur durch eine Lücke von der Breite $2d$ überschreiten.

Für den Gang der Rechnung ist es zweckmäßig, in der ζ-Ebene Polarkoordinaten einzuführen: $\zeta = r e^{i\varphi}$, und in der $\mathfrak{z}$-Ebene bipolare Koordinaten (vgl. Abb. 7):

$$\begin{cases} z - d = \varrho\, e^{i\vartheta} \\ z + d = \sigma\, e^{i\varepsilon} \end{cases}.$$

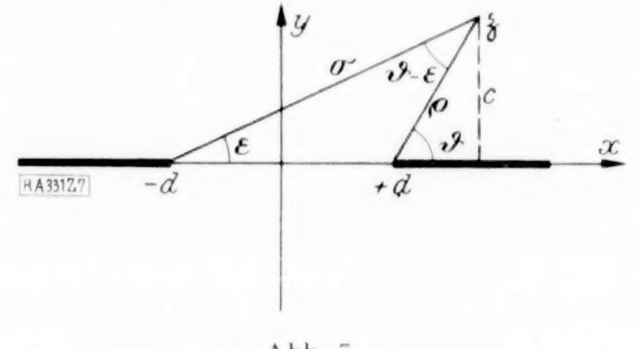


Abb. 7.

Die Abbildungsfunktion wird dann:

$$\zeta = f(z) = r e^{i\varphi} = \sqrt{2d}\,\frac{\sigma^{\frac{1}{2}}\, e^{i\frac{\varepsilon}{2}}}{\varrho^{\frac{1}{2}}\, e^{i\frac{\vartheta}{2}}}.$$

Es lassen sich nun folgende Beziehungen ausrechnen; die nachher gebraucht werden:

$$f'(z) = -d\sqrt{2d}\,(z+d)^{-\frac{1}{2}}(z-d)^{-\frac{3}{2}} = -d\sqrt{2d}\,\sigma^{-\frac{1}{2}}\varrho^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{i}{2}(3\vartheta+\varepsilon)}$$

$$|f'(z)| = d\sqrt{2d}\,\varrho^{-\frac{3}{2}}\sigma^{-\frac{1}{2}} \qquad \beta = \sqrt{2d}\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\varepsilon-\vartheta}{2}$$

a) Wirbelbewegung in ruhender Flüssigkeit. Für den Fall der Wirbelbewegung in ruhender Flüssigkeit läßt sich wiederum als Routhsche Stromfunktion ansetzen:

$$\chi = \frac{\mu}{2}\lg\frac{\beta}{|f'(c)|}.$$

Wenn jetzt $\varrho, \sigma, \varepsilon, \vartheta$ die Koordinaten des Wirbelpunktes sind, nimmt die Routhsche Stromfunktion folgende Gestalt an:

$$\chi = \frac{\mu}{2}\lg\left(\frac{1}{d}\,\varrho\,\sigma\sin\frac{\varepsilon-\vartheta}{2}\right).$$

Diese Gleichung erlaubt eine Umformung, wenn man von den in ihr vorkommenden vier Veränderlichen $\varrho, \sigma, \varepsilon, \vartheta$ zwei durch die beiden anderen ausdrückt. Nach Abb. 7 gilt:

$$\varrho\sin\vartheta = \sigma\sin\varepsilon; \qquad \varrho\cos\vartheta = \sigma\cos\varepsilon - 2d.$$

Hieraus ergibt sich für die Differenz der Winkel:

$$\cos(\varepsilon-\vartheta) = \frac{\varrho^2+\sigma^2-4d^2}{2\varrho\sigma}.$$

Also ist:

$$2\sin^2\frac{\varepsilon-\vartheta}{2} = \frac{4d^2-(\varrho-\sigma)^2}{2\varrho\sigma}; \qquad 2\cos^2\frac{\varepsilon-\vartheta}{2} = \frac{-4d^2+(\varrho+\sigma)^2}{2\varrho\sigma},$$

so daß wir als Gleichung für die Wirbelbahn erhalten:

$$\frac{\mu}{4}\lg\left\{\frac{1}{4d^2}\,\varrho\sigma\left[4d^2-(\varrho-\sigma)^2\right]\right\} = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Die Konstante C soll wieder durch den Wirbelabstand A im Unendlichen festgelegt werden.

Aus Abb. 7 läßt sich für den Inhalt des durch die Radienvektoren ϱ, σ und die Lücke gebildeten Dreiecks ablesen:

$$I = \frac{\varrho\,\sigma \sin(\vartheta - \varepsilon)}{2} = d\,c\;.$$

Der Wirbelabstand im Unendlichen ist

$$A = \lim_{\substack{\varrho,\sigma \to \infty \\ \vartheta - \varepsilon = 0}} \frac{\varrho\,\sigma \sin(\vartheta - \varepsilon)}{2\,d} = e^{\frac{2c}{\mu}},$$

so daß die Bahngleichung für einen Wirbel in ruhender Flüssigkeit folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\varrho\,\sigma\,[4\,d^2 - (\varrho - \sigma)^2] = 4\,d^2 A^2 \; . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Versteht man unter ϱ_0 und σ_0 die bipolaren Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse, für welche dann gilt: $\varrho_0 = d - x_0$, $\sigma_0 = d + x_0$, so läßt sich erkennen, daß die Wirbelbahnen die x-Achse in der Entfernung $\pm\sqrt{d^2 \underset{(+)}{-} d\,A}$ vom Koordinatenursprung durchsetzen. Das zweite sich unter der Wurzel ergebende Vorzeichen muß unberücksichtigt bleiben, weil $|x_0| = |\sqrt{d^2 - d\,A}| < d$ vorausgesetzt ist, während beiden Vorzeichen vor der Wurzel ein Sinn zukommt. Je nachdem $A \lesseqgtr d$, werden demnach die Bahnkurven die x-Achse zweimal, einmal oder gar nicht schneiden.

Bildet man die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial \chi}{\partial b} = \frac{\mu}{16\,d}\sqrt{-4\,d^2 + (\varrho + \sigma)^2}\,\frac{4\,d^2(\varrho^2 + \sigma^2) - (\varrho - \sigma)^4}{\varrho^2\,\sigma^2\sqrt{4\,d^2 - (\varrho - \sigma)^2}} \\ v &= -\frac{\partial \chi}{\partial a} = \frac{\mu}{16\,d}\,\frac{(\sigma^2 - \varrho^2)\,[4\,d^2 - (\varrho - \sigma)^2]}{\varrho^2\,\sigma^2} \end{aligned}\right. ,$$

so erkennt man, daß im Falle zweier Schnittpunkte die x-Achse senkrecht durchstoßen wird, da für $\varrho_0 = d - x_0$, $\sigma_0 = d + x_0$ die u-Komponente verschwindet.

$$u_{|\varrho_0 + \sigma_0 = 2d} = 0 \qquad\qquad v_{|\varrho_0 + \sigma_0 = 2d} = \mu\,\frac{d - \varrho_0}{\varrho\,(2\,d - \varrho_0)}\,.$$

Dabei durchsetzt der Wirbel die positive x-Achse in Richtung der positiven y-Achse ($\varrho_0 < d$), die negative x-Achse in umgekehrter Richtung ($\varrho_0 > d$). Aus dem Unendlichen kommend, wird er in die Lücke hineingezogen und wandert auf der anderen Seite wieder ins Unendliche zurück.

Im Übergangsfalle $A = d$ befindet sich der Wirbel in Ruhe. Dieser Ruhepunkt ist der einzige, da für keinen anderen Wert von ϱ und σ u und v gleichzeitig verschwinden. Analytisch erweist er sich als Doppelpunkt, da für $\varrho_0 = \sigma_0 = d$ die Diskriminante $\chi_{ab}{}^2 - \chi_{aa}\,\chi_{bb} = \frac{\mu^2}{2\,d^4} > 0$. Die zugehörigen Tangentenrichtungen errechnen sich zu $\pm\sqrt{2}$.

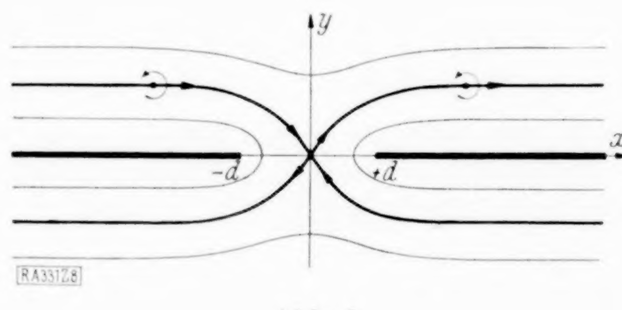


Abb. 8.

Für den Fall $A > d$ meidet der Wirbel die Lücke und wird immer weniger von der Kontur beeinflußt, je weiter er sich davon im Unendlichen befindet.

Abb. 8 zeigt die Wirbelbahnen für die drei Fälle mit den Asymptotenabständen $A = \frac{d}{2}$, d, $\frac{3d}{2}$ [9]).

[9]) Siehe Fußnote [7]).

b) Wirbelbewegung in strömender Flüssigkeit. Die zu überlagernde Potentialströmung ψ muß so gewählt werden, daß die von $+d$ und $-d$ beiderseits ins Unendliche gehenden Wände zu Stromlinien werden und daß sie im Endlichen singularitätenfrei ist. Diese Potentialströmung ist bekannt; ihre Stromlinien bilden eine Schar konfokaler Hyperbeln mit den Brennpunkten in $+d$ und $-d$. Die Stromfunktion wird demnach als Funktion von $(\varrho - \sigma)$ in der Form: $f(\varrho - \sigma)$ anzusetzen sein, die der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f(\varrho - \sigma)}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 f(\varrho - \sigma)}{\partial b^2} = 0$$

genügt, wobei ϱ und σ als Funktionen von a und b zu betrachten sind. Man erhält:

$$\Delta f = f''(\varrho - \sigma) \cdot [(\varrho - \sigma)^2 - 4d^2] + f'(\varrho - \sigma) \cdot (\varrho - \sigma) = 0 .$$

Durch Integration ergibt sich für die Stromfunktion:

$$\psi = u_0 \arcsin \frac{\varrho - \sigma}{2d} .$$

Die Geschwindigkeitskomponenten werden:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial b} = u_0 (\sigma - \varrho) \dfrac{\pm \sqrt{(\varrho + \sigma)^2 - 4d^2}}{4 d \varrho \sigma} \\[2ex] v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial a} = u_0 (\sigma + \varrho) \dfrac{+\sqrt{4d^2 - (\varrho - \sigma)^2}}{4 d \varrho \sigma} \end{cases}$$

Dabei ist für die u-Komponente das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen, je nachdem $y \gtrless 0$ gewählt wird. Für die v-Komponenten gilt nur das positive Zeichen der Wurzel. u_0 kann mittels der Strömungsgeschwindigkeit im Mittelpunkt der Lücke: $v = \frac{u_0}{d}$ definiert werden.

Die Routhsche Stromfunktion für einen sich in dieser Potentialsströmung bewegenden Wirbel nimmt nun folgende Gestalt an:

$$\chi = u_0 \arcsin \frac{\varrho - \sigma}{2d} + \frac{\mu}{4} \lg \left\{ \frac{1}{4d^2} \varrho \sigma [4d^2 - (\varrho - \sigma)^2] \right\} ,$$

die, konstant gesetzt, wieder die Gleichung der Bahnkurven gibt. Die Geschwindigkeitskomponenten sind:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\pm \sqrt{(\varrho + \sigma)^2 - 4d^2}}{4 d \varrho \sigma} \left\{ u_0 (\sigma - \varrho) + \dfrac{\mu}{4} \dfrac{4d^2(\varrho^2 + \sigma^2) - (\varrho - \sigma)^4}{\varrho \sigma \sqrt{4d^2 - (\varrho - \sigma)^2}} \right\} \\[2ex] v = \dfrac{+(\sigma + \varrho)\sqrt{4d^2 - (\varrho - \sigma)^2}}{4 d \varrho \sigma} \left\{ u_0 + \dfrac{\mu}{4} \dfrac{(\sigma - \varrho)\sqrt{4d^2 - (\varrho - \sigma)^2}}{\varrho \sigma} \right\} \end{cases}$$

Befindet sich der Wirbel in gleichen Abständen von den Enden der Lücke, ist also $\varrho = \sigma$, dann liefert die Potentialströmung keinen Beitrag zu seiner Bewegung in Richtung der x-Achse, in Richtung der y-Achse hingegen ist seine Geschwindigkeit unabhängig von der eigenen Wirbelstärke.

$$u_{|\varrho = \sigma} = \pm \frac{\mu}{2} \frac{\sqrt{\varrho^2 - d^2}}{\varrho^2} ; \qquad v_{|\varrho = \sigma} = \frac{u_0}{\varrho} .$$

Je nach dem Ort, an dem sich der Wirbel befindet, wird er in Richtung der Strömung laufen oder gegen sie. Es erübrigt sich daher von vornherein die getrennte Untersuchung der beiden Fälle $\frac{\mu}{u_0} \gtrless 0$, da der eine durch Drehspiegelung des Strömungsfeldes am Anfangspunkte aus dem anderen hervorgeht. Im folgenden sind μ und u_0 positiv gewählt.

Die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der x-Achse verschwindet für $\varrho + \sigma = 2d$. Das bedeutet aber, daß alle Wirbel, welche die x-Achse passieren, diese in senkrechter Richtung durchsetzen, solange die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der y-Achse nicht ebenfalls verschwindet. In diesem Ausnahmefalle gilt nämlich die Beziehung:

$$\frac{\mu}{u_0} = \frac{\sqrt{\varrho(2d - \varrho)}}{\varrho - d} .$$

Für positives μ und u_0 muß demnach für die Lage des Ruhepunktes gelten: $\varrho > d$. Diese Bemerkung ermöglicht es, über die Vorzeichen zu entscheiden, die in die aus obiger Gleichung zu errechnenden Ruhepunktskoordinaten:

$$\varrho = d \underset{(-)}{+} \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{u_0}\right)^2 + 1}} \qquad \sigma = d \underset{(+)}{-} \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{\mu}{u_0}\right)^2 + 1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

eingehen.

Die Frage nach Asymptoten erledigt sich durch eine ähnliche Grenzbetrachtung, wie sie für (13) angestellt wurde. Der Wirbel kommt aus dem Unendlichen im Abstande

$$A = e^{\frac{2c \pm u_0 \pi}{\mu}}.$$

Die Schnittpunkte der Bahnkurve mit der x-Achse erhält man zufolge der dort herrschenden Bedingung $\sigma_0 = 2d - \varrho_0$ aus der Gleichung:

$$u_0 \arcsin \frac{\varrho_0 - d}{d} + \frac{\mu}{2} \lg \frac{\varrho_0 (2d - \varrho_0)}{d} = c .$$

Die x-Achse wird von der Bahnkurve eines Wirbels gar nicht, einmal oder zweimal durchsetzt; dies läßt sich in ähnlicher Weise wie im Fall Ibb im einzelnen durchführen.

Abb. (9) zeigt die Wirbelbahnen für das Verhältnis $\left|\frac{\mu}{u_0}\right| = 4$. Folgende Bahntypen lassen sich unterscheiden:

1) Der Wirbel kommt mit positivem Asymptotenabstand aus dem Negativ-Unendlichen, läuft gegen die Strömung durch die Lücke und wandert ins Negativ-Unendliche zurück.

2) Der Wirbel kommt mit negativem Asymptotenabstand aus dem Positiv-Unendlichen, durchläuft in der Strömungsrichtung die Lücke und wandert nach dem Positiv-Unendlichen wieder ab.

3) Von diesen Bahnen trennt die Doppelpunktskurve die Bahnen derjenigen Wirbel, die überhaupt nicht durch die Lücke gehen.

Auf der Doppelpunktskurve hat der Wirbel im Doppelpunkte die Geschwindigkeit Null. In einem derartigen Ruhepunkte, wie er auch in den durch die Abb. (6) und (8) dargestellten Kurven auftritt, ist der Wirbel bedingt stabil. Erfährt er in seiner Ruhelage irgendwelche Störungen, so entfernt er sich im allgemeinen von diesem Ruhepunkte, vorausgesetzt, daß die Störung nicht gerade in der Richtung erfolgt, in der der Wirbel dem Ruhepunkte zustrebt. Eine derartig ausgezeichnete Richtung ist immer durch eine der beiden Doppelpunktstangenten bestimmt. In den Abbildungen sind durch Pfeile die Bewegungen des Wirbels in der Nachbarschaft eines solchen Ruhepunktes angedeutet [10]).

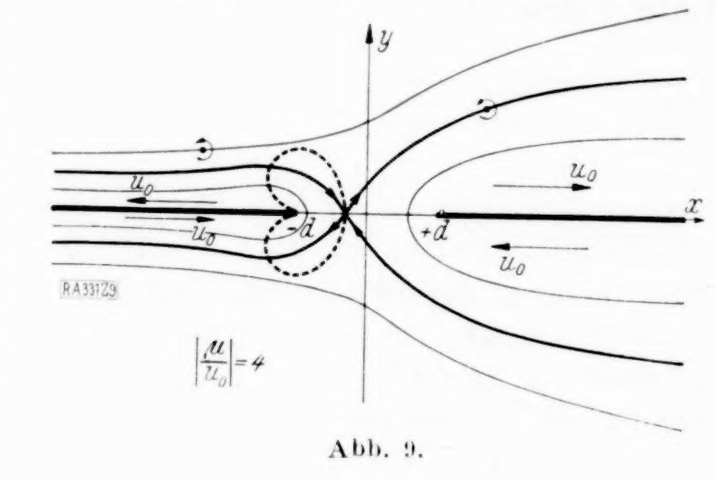


Abb. 9.

III. Wirbelbewegung um eine Platte von der Breite 2d.

Die Abbildung der oberen Halbebene (ζ) auf die längs der Strecke $-d < x < +d$ aufgeschnittenen Ebene läßt sich durch nochmalige Inversion aus der vorher verwendeten Abbildung herleiten und lautet:

$$\zeta = i\sqrt{2\,d}\sqrt{\frac{z+d}{z-d}},$$

oder bei Einführung bipolarer Koordinaten:

$$\zeta = f(z) = i\sqrt{2\,d}\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\varepsilon - \vartheta)} .$$

[10]) A. Kneschke: Ann. Physik, 9, 1931, S. 907.

a) Wirbelbewegung in ruhender Flüssigkeit. Durch die sich aus der Abbildungsfunktion ergebenden Werte für

$$|f'(z)| = d\sqrt{2\,d}\;\varrho^{-\frac{3}{2}}\,\sigma^{-\frac{1}{2}} \qquad \beta = \sqrt{2\,d}\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\varepsilon-\vartheta}{2}$$

wird die Bahnfunktion des Wirbels in ruhender Flüssigkeit:

$$\chi = \frac{\mu}{4}\lg\left\{\frac{1}{4\,d^2}\,\varrho\,\sigma\left[(\varrho+\sigma)^2 - 4\,d^2\right]\right\}.$$

Die Bahnkurven $\chi = C$ haben keine Asymptoten. Es soll deshalb die Konstante C durch den Abstand d_0 des Durchstoßpunktes durch die positive x-Achse vom Koordinatenursprung festgelegt werden (Abb. 10). Setzt man die dort geltenden Beziehungen $\sigma_0 = d_0 + d$, $\varrho_0 = d_0 - d$ in den Ausdruck für die Bahnkurve ein, so erhält man:

$$\frac{\mu}{2}\lg\frac{d_0^{\,2}-d^2}{d} = c\,, \qquad d_0 = \sqrt{d^2 + d\,e^{\frac{2c}{\mu}}}\,,$$

so daß die Bahnfunktion in folgender einfachen Form zu schreiben ist:

$$\varrho\,\sigma\left[(\varrho+\sigma)^2 - 4\,d^2\right] = 4\,(d_0^{\,2} - d^2)^2 \quad \text{. . . . . (16).}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten:

$$u = \frac{\partial\chi}{\partial b} = \pm\frac{\mu}{16\,d}\sqrt{4\,d^2 - (\varrho-\sigma)^2}\;\frac{4\,d^2(\varrho^2+\sigma^2) - (\varrho+\sigma)^4}{\varrho^2\,\sigma^2\sqrt{(\varrho+\sigma)^2 - 4\,d^2}}$$

$$v = -\frac{\partial\chi}{\partial a} = \frac{\mu}{16\,d}\,\frac{(\varrho^2-\sigma^2)\left[(\varrho+\sigma)^2 - 4\,d^2\right]}{\varrho^2\,\sigma^2}$$

lassen erkennen, daß der Wirbel die x-Achse in senkrechter Richtung mit den Geschwindigkeiten $v = \mp\,\mu\,\frac{d_0}{d_0^{\,2} - d^2}$ passiert, während beim Durchgange durch die y-Achse nur die Geschwindigkeiten in horizontaler Richtung vorhanden sind:

$$u = \pm\,\mu\,\frac{d^2 - 2\,\varrho^2}{2\,\varrho^2\sqrt{\varrho^2 - d^2}}\,.$$

Die Gestalt der Wirbelbahnen ist aus Abb. 10 ersichtlich.

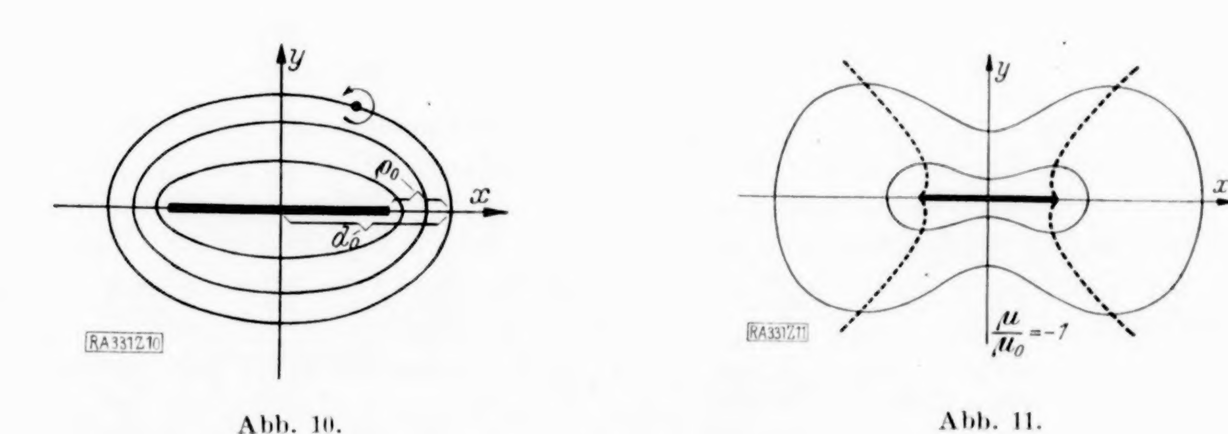


Abb. 10. Abb. 11.

b) Wirbelbewegung in strömender Flüssigkeit. Die Bahnen der zu überlagernden Potentialströmung sind Ellipsen, die ihre Brennpunkte in den Endpunkten der Platte haben. Die Potentialströmung wird also in der Form $f(\varrho+\sigma)$ darstellbar sein, außerdem muß sie der Laplaceschen Gleichung genügen:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f(\varrho+\sigma)}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 f(\varrho+\sigma)}{\partial b^2} = 0\,.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung gibt die Stromfunktion:

$$\psi = \mu_0\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\varrho+\sigma}{2\,d}\,.$$

Dabei kann μ_0 durch die Zirkulation um die Platte: $\Gamma = 2\pi\mu_0$ definiert werden dadurch, daß man die Strömung um die Platte durch konforme Abbildung aus der Zirkulation um den Kreis entstehen läßt. Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß man durch diese Abbildung ebenfalls beide Strömungen, um die Platte und durch die Lücke, aus dem komplexen Potential $\Omega = c \lg [z + \sqrt{z^2 - d^2}]$ hätte gewinnen können.

Die Bahngleichung des Wirbels in strömender Flüssigkeit erhält dann folgende Gestalt:

$$\mu_0 \operatorname{Ar\,Cof} \frac{\varrho + \sigma}{2d} + \frac{\mu}{4} \lg \left\{ \frac{1}{4d^2} \varrho\,\sigma\,[(\varrho + \sigma)^2 - 4d^2] \right\} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Zufolge der auch hier geltenden Bedingungen, wie sie in (16) verwendet wurden, ist:

$$C = \mu_0 \operatorname{Ar\,Cof} \frac{d_0}{d} + \frac{\mu}{2} \lg \frac{d_0{}^2 - d^2}{d} .$$

Als Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich:

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial b} = \frac{\sqrt{4d^2 - (\varrho - \sigma)^2}}{4 d \varrho \sigma} \left| \mu_0 (\varrho + \sigma) + \frac{\mu}{4} \frac{4d^2(\varrho^2 + \sigma^2) - (\varrho + \sigma)^4}{\varrho\,\sigma \sqrt{(\varrho + \sigma)^2 - 4d^2}} \right|$$

$$v = -\frac{\partial \chi}{\partial a} = \frac{(\varrho - \sigma)\sqrt{(\varrho + \sigma)^2 - 4d^2}}{4 d \varrho \sigma} \left| \mu_0 + \frac{\mu}{4} \frac{(\varrho + \sigma)\sqrt{(\varrho + \sigma)^2 - 4d^2}}{\varrho\,\sigma} \right| ,$$

speziell an den Durchgangsstellen durch die y-Achse $\varrho = \sigma$ und an den Durchgangsstellen durch die x-Achse $\sigma_0 = \varrho_0 \pm 2d$

$$u_{\varrho = \sigma} = \pm \left| \frac{\mu_0}{\varrho} + \mu \frac{d^2 - 2\varrho^2}{2\varrho^2 \sqrt{\varrho^2 - d^2}} \right| \qquad u_{\sigma_2 = \varrho_0 \pm 2d} = 0$$

$$v_{\varrho = \sigma} = 0 \qquad v_{\sigma_0 = \varrho_0 \pm 2d} = \mp \left| \frac{\mu_0}{\sqrt{d_0{}^2 - d^2}} + \frac{\mu\, d_0}{d_0{}^2 - d^2} \right| .$$

Der Durchgang durch die y-Achse erfolgt also in horizontaler Richtung, die x-Achse wird senkrecht durchsetzt.

Ein Ruhepunkt besteht nicht, da u und v für keinen Wert von ϱ und σ gleichzeitig verschwinden.

Für den Fall, daß Wirbel und Zirkulation gleichen Richtungssinn haben ($\mu > 0$; $\mu_0 > 0$), zeigen die Bahnkurven keine Besonderheiten gegenüber denen des Wirbels in ruhender Flüssigkeit. Ihre Gestalt wird durch Abb. 10 ebenfalls gekennzeichnet.

Für den Fall, daß $\mu > 0$; $\mu_0 < 0$ zeigen die Bahnkurven dagegen eine Ausbuchtung nach den Plattenenden zu, wie die schon bei den früher behandelten Wirbelbewegungen [I (bb) und II (b)] erkannt wurden, sobald nur Wirbel und Zirkulation verschiedenen Richtungssinn haben. Die Bahnkurven müssen also außer auf der y-Achse weitere Punkte besitzen, denen horizontale Tangenten zukommen. Der geometrische Ort aller dieser Punkte wird durch die Gleichung:

$$\mu_0 - \frac{\mu}{4} \frac{(\varrho + \sigma)\sqrt{(\varrho + \sigma)^2 - 4d^2}}{\varrho\,\sigma} = 0$$

bestimmt und ist mit in Abb. 11 aufgenommen [11]).

Es ist zu bemerken, daß sich, wenigstens in ruhender Flüssigkeit, die Bahnkurven um eine Platte und durch eine Lücke analytisch als Zweige einer einzigen algebraischen Kurve 6. Ordnung ergeben, wenn kartesische Koordinaten zugrunde gelegt werden. Es ist aber davon Abstand genommen worden, die Rechnung in diesen Koordinaten durchzuführen, da sie für die Wirbelbewegung in strömender Flüssigkeit zu unübersichtlichen Ausdrücken führen würde.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und ihre Förderung spreche ich Herrn Prof. Dr. M. Lagally in Dresden meinen Dank aus. 331

[11]) Siehe Fußnote [6]).

KLEINE MITTEILUNGEN

Beiträge zur Nomographie. II.[1] Im folgenden sollen, vornehmlich im Anschluß an in dieser Zeitschrift erschienene Arbeiten einige kurze Bemerkungen und Ergänzungen zu denselben gegeben werden.

1. Zur Theorie der Dreieck- und Sechsecktafeln. In dem Aufsatz: „Die Dreieckrechentafeln und die hydraulische Energieumwandlungskurve“[2]), sowie in seinem Lehrbuch hat Herr O. Lacmann[3]) eine Verallgemeinerung der Hexagonaltafeln von Ch. Lallemand in dem Sinne durchgeführt, daß er Tafeln von der Form

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) = C$$

behandelt, während der letztere bloß den Fall $C = 0$ in Betracht gezogen hatte. Wie Ch. Lallemand legt auch O. Lacmann seinen Betrachtungen durchwegs ein gleichseitiges Dreieck zugrunde. In „I“ habe ich gezeigt, daß dies nicht unbedingt notwendig ist und daß derartige Aufgaben auch an schiefwinkelige Dreiecke angeschlossen werden können. Im folgenden soll dargelegt werden, wie sich die bisher erhaltenen Ergebnisse als Sonderfälle zweier allgemeiner elementar-geometrischer Probleme darstellen.

Das erste ist aus der Zusammenfassung zweier, im ersten Bande (Géométrie plane) der „Leçons de Géométrie élémentaire“ von J. Hadamard[4]) enthaltenen Einzelaufgaben entstanden und lautet: Von den Scheiteln A_i eines Dreiecks seien zu den Gegenseiten a_i die Strecken $A_i D_i = d_i$ geführt. Legt man (s. Abb. 1) durch einen beliebigen, im

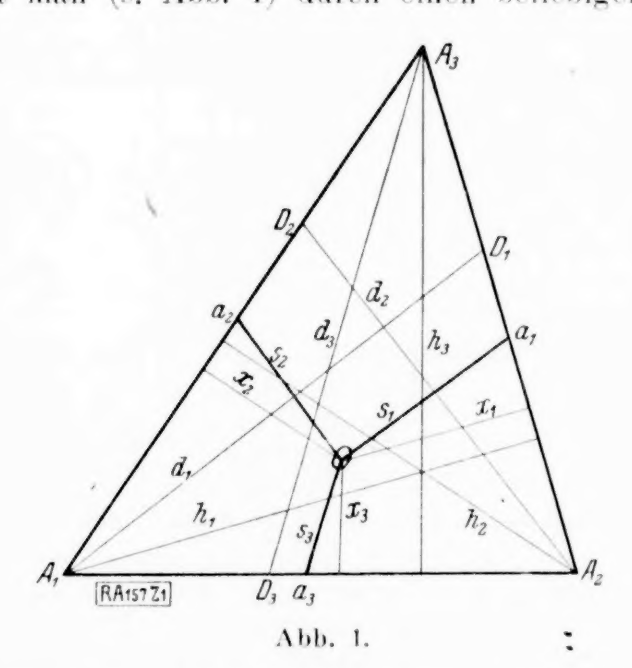


Abb. 1.

Innern des Dreiecks gelegenen Punkt 0 die Parallelen s_i zu diesen Strecken bis zu ihrem Zusammentreffen mit den entsprechenden Seiten, so gilt stets

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{s_i}{d_i} = 1\,.$$

wie auch der Punkt 0 gelegen sei.

Die zweite Aufgabe lautet[5]): Gehen drei Geraden durch einen Punkt, so gibt es immer solche Zahlenfaktoren, daß die Entfernung eines beliebigen Punktes der Ebene von einer derselben gleich ist der Summe oder der Differenz der mit diesen Faktoren multiplizierten Abstände. — Es ist das Ergebnis von der Lage des Punktes durch eine entsprechende Verfügung über die Zeichen vollständig unabhängig zu machen. (Umkehrung!)

Der Beweis beider Aufgaben wird durch Heranziehung von Flächenbeziehungen[6]) geführt.

α) Beweis der ersten Aufgabe: Es ist, wenn die senkrechten Abstände des Punktes von den Seiten a_i mit x_i bezeichnet werden:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = 2F \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

wo F den Flächeninhalt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ bedeutet. Ferner besteht die Beziehung

$$\frac{x_i}{s_i} = \frac{h_i}{d_i}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Es ergibt sich also

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \frac{s_i}{d_i} h_i = 2F$$

und mit $a_i h_i = 2F$:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{s_i}{d_i} = 1\,, \quad \text{w. z. b. w.} \quad . \; . \; . \quad (2).$$

Wie leicht ersichtlich, sind die d_i an die Beziehung $d_{i\,\min} \geq h_{\max}$ geknüpft. Je nach Wahl der d_i ergeben sich die von J. Hadamard gestellten Aufgaben:

a) Wählt man $d_i = h_i$, so ergibt sich seine „exercice 301“[7]).

b) Wählt man $d_i = d$, so ergibt sich „problème 369“[8]).

Wählt man hier $a_i = a$ und $d_i = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, bzw. $d_i = a$, so erhält man die von O. Lacmann behandelten Fälle. Für $d > \frac{a}{2}\sqrt{3}$ erhält man den von O. Lacmann ebenfalls behandelten Sonderfall; im Anschluß hieran ist zu bemerken, daß die von H. Schwerdt in seinem Lehrbuch[9]) ausgesprochene Meinurg, die Seiten des gleichseitigen Grunddreiecks müßten die Leitern auf dem Achsenkreuz senkrecht schneiden, unrichtig ist; dies ist ebenso unwesentlich wie bei den Hexagonaltafeln (s. u.).

β) Beweis der zweiten Aufgabe. (Es werde bloß die erste Behauptung bewiesen.) Bezeichnet man wie vorhin die Abstände des Punktes 0 von den Seiten mit x_i $(i = 1, 2, 3)$, so gilt auch hier Gl. (1).

Berechnet man rechts F nach der Formel $F = \frac{a_1 a_2 a_3}{4r}$, ersetzt sodann die a_i auf beiden Seiten durch $a_i = 2r \sin \alpha_i$ und geht nun mit $r \to 0$, so entsteht

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \sin \alpha_i = 0\,,$$

[1]) Als „I“ ist mein „Beitrag zur Nomographie“, diese Zeitschrift, Band 4 (1924), Heft 4, S. 351, anzusehen.

[2]) Diese Zeitschrift, Band 2 (1922), Heft 5, S. 375.

[3]) Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln, Berlin 1923.

[4]) 9e éd., Armand Colin, Paris 1925.

[5]) J. Hadamard: a. a. O., problème 370, S. 299.

[6]) Vgl. „I“.

[7]) J. Hadamard: a. a. O., S. 246.

[8]) S. 299.

[9]) H. Schwerdt: Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage. Berlin 1924.

was eine andere Form der Behauptung darstellt und welches Ergebnis bei M. d'Ocagne[10]) auf anderem Wege hergeleitet wird. — Mit $\alpha_i = \frac{\pi}{3}$ ($i = 1, 2, 3$) erhält man die gewöhnlichen Sechsecktafeln. Aus den bei O. Lacmann und H. Schwerdt in ihren Lehrbüchern durchgeführten Rechnungen ergibt sich, daß auch hier das Achsenkreuz um einen beliebigen Winkel gegen das Grunddreieck verdreht sein kann.

2. Elementare Herleitung einer Multiplikationstafel mit kreisförmiger Ableselinie[11]). Es sei ein rechtwinkeliges kartesisches Koordinatensystem x, y gegeben,

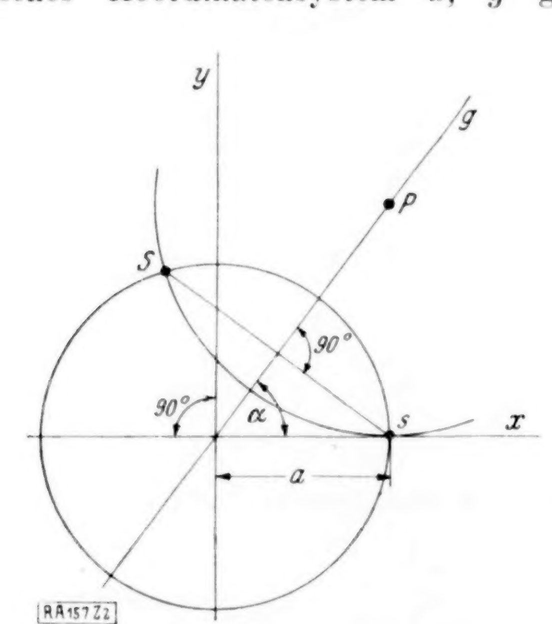


Abb. 2.

ferner auf der positiven x-Achse in der frei wählbaren, aber festen Entfernung a ein Punkt S (s. Abb. 2). Zieht man durch den Ursprung eine unter dem Winkel α gegen die x-Achse geneigte Gerade g und spiegelt den Punkt S an derselben, so erfüllen bei veränderlichem α die Spiegelbilder S' einen Kreis. Beziffert man diesen gemäß der Beziehung $\operatorname{tg} \alpha = f_3(x_3)$ und trägt auf den Achsen bezüglich $x = 1 / f_1(x_1)$ und $y = f_2(x_2)$ auf, so gilt für jeden Punkt P mit den Koordinaten x und y auf g die Beziehung

$$y / x = \operatorname{tg} \alpha$$

oder

$$f_1(x_1) f_2(x_2) = f_3(x_3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Um zu gegebenem x_1 und x_2 das gesuchte x_3 zu erhalten, ist die eine Spitze eines Zirkels in P, die andere in S einzusetzen. Der Kreis um P schneidet dann auf dem gezeichnet vorliegenden S'-Kreis den gesuchten x_3-Wert ab.

Als Verallgemeinerungen sind zu erwähnen:

α) Faßt man x und y als Funktionen beider Parameter x_1 und x_2 auf, also $x = x(x_1, x_2)$ und $y = y(x_1, x_2)$, so kann statt (α) die allgemeinere Beziehung $f_3(x_3) = f_{1,2}(x_1, x_2)$ vertafelt werden. Es entstehen dann statt der Parallelenscharen Kurvenscharen für x_1 bzw. x_2[12]).

β) Ferner ist die Wahl von a völlig freigestellt; es kann daher unter Ausnutzung dieses Umstandes die noch allgemeinere Form der Funktionsbeziehung

$$f_{3,4}(z_3, x_4) = f_{1,2}(x_1, x_2)$$

vertafelt werden, worauf aber nicht näher eingegangen werden soll.

3. Logarithmische Netztafel für die quadratische Gleichung $z^2 + a z = b$. Im folgenden soll die bekannte Tafel von L. Lalanne auf Logarithmenpapier übertragen werden. Im Sinne meines bereits erwähnten allgemeinen Verfahrens ist, um das logarithmographische Verfahren von R. Mehmke[13]) anwenden zu können, folgende Zerfällung vorzunehmen:

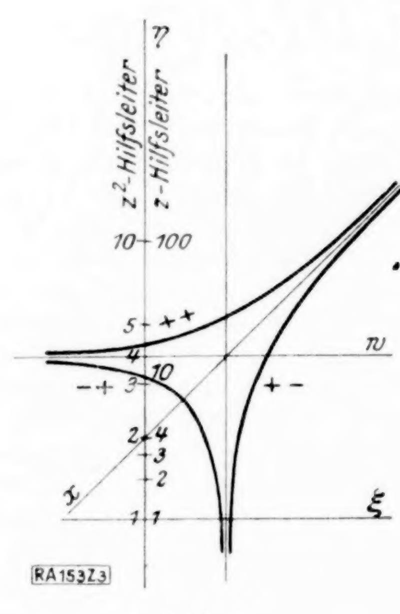


Abb. 3.

Gleichung der Ablesegeraden:

$$y = + x z + z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{I}),$$

Gleichung der Lösenden Kurve:

$$x = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II}),$$

Gleichung der Bezifferung:

$$y = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{III}).$$

Es erweist sich als unerläßlich, die einzelnen Fälle, die durch die Vorzeichenkombinationen in (I) bedingt sind, gesondert zu behandeln.

Fall a: $a > 0$, $b > 0$, α) $z > 0$. Dann ist nach Auftragung der z-Leiter und z^2-Leiter auf der η-Achse des Koordinatensystems (s. Abb. 3) — die Konstruktion der z^2-Leiter erfolgt zweckmäßig über das Parabelbild $y = x^2$ — die Wagerechte w der „Geradenbildtafel" auf der z^2-Leiter, die Schräge x auf der z-Leiter, einzustellen, wodurch die vorgeschriebene Stellung des $++$-Astes (gemäß Gl. I) erhalten wird, welcher punktweise auf das Grundblatt durchzustechen ist[14]). Man erhält so die für positive z-Werte sich ergebenden Geradenbilder, die nach denselben zu beziffern sind. (Abb. 4 a.)

β) $z < 0$. Hier lautet die

Gleichung der Ablesegeraden:

$$y = - x(-z) + z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{I}),$$

[10]) M. d'Ocagne: Calcul graphique et Nomographie 3e éd., Paris 1924, S. 3.

[11]) Vgl. hierzu Mitt. I und II meiner Arbeit: „Über ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graph. Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln". Diese Zeitschrift, Band 7 (1927), Heft 3 und 5.

[12]) Die Anwendung dieses Gedankens führt zu einer sehr allgemeinen Anwendungsmöglichkeit des Rechtwinkelkreuzes für Funktionsbeziehungen von der Form $f_1(x_1), f_2(x_2) = f_{3,4}(x_3, x_4)$, sowie zu einer neuen Vertafelungsart für Beziehungen von der Form $f_{1,2}(x_1, x_2) = f_{3,4}(x_3, x_4)$. Hierüber sollen „Beiträge . . . III" berichten.

[13]) Vgl. hierzu R. Mehmke: Leitfaden für das graph. Rechnen. 2. Aufl. Leipzig-Wien, 1924.

[14]) Unter „Geradenbildtafel" ist, wie in meiner Arbeit, das in Abb. 3 dargestellte, auf einem durchsichtigen und durchstechbaren Papier angebrachte Kurventripel nebst Horizontale w und Schräge x zu verstehen. Abb. 3 zeigt die Einstellung der „Geradenbildtafel" für $z = 4$.

während alles übrige unverändert bleibt. Denkt man sich für den Augenblick $-z$ durch $\bar{z}$ ersetzt, so ist leicht ersichtlich, daß der Ast $-$ $+$ der Geradenbildtafel zu verwenden bzw. durchzustechen ist, der nach n e g a t i v e n z-Werten zu beziffern ist (s. Abb. 4 a).

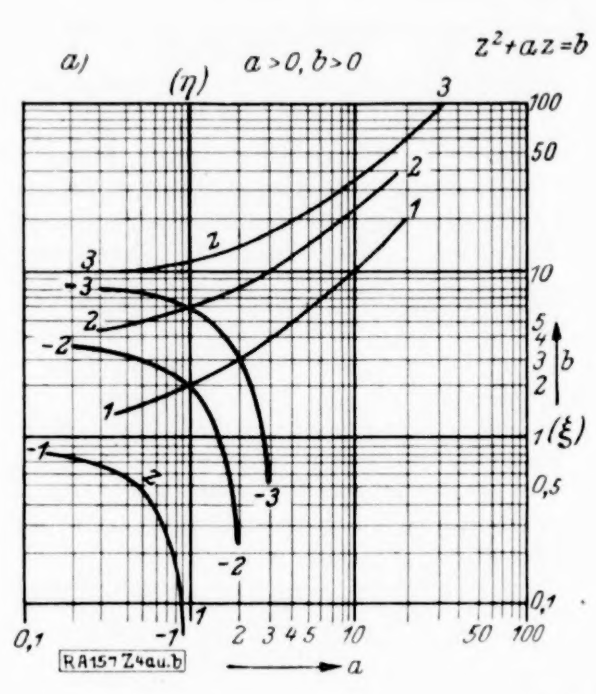
β) $z < 0$:

Gleichung der Ablesegeraden:

$$y = +x(-z) - z^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve:

$$x = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)},$$



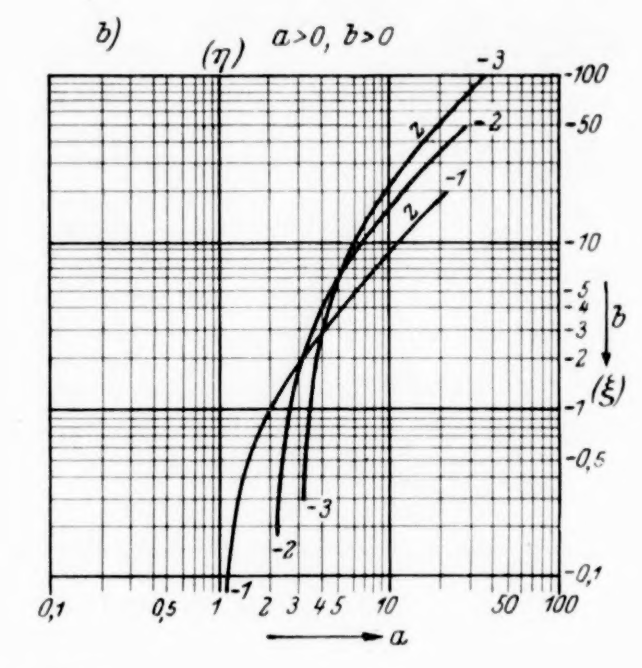
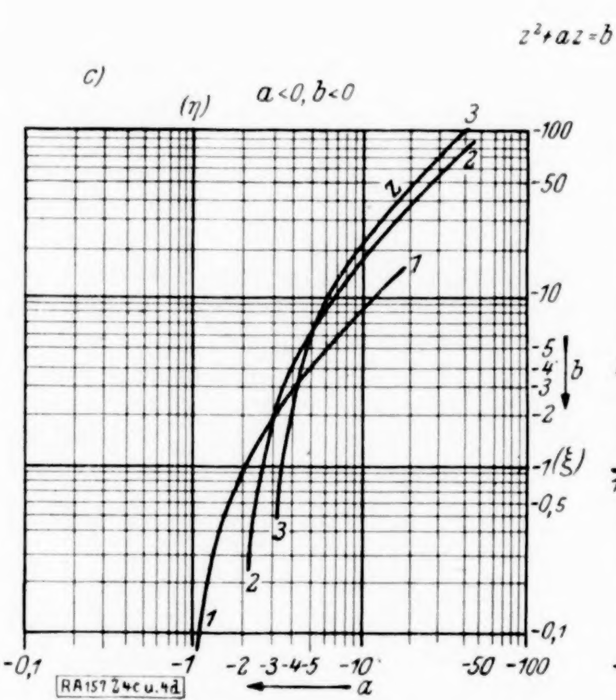


Abb. 4a und 4b



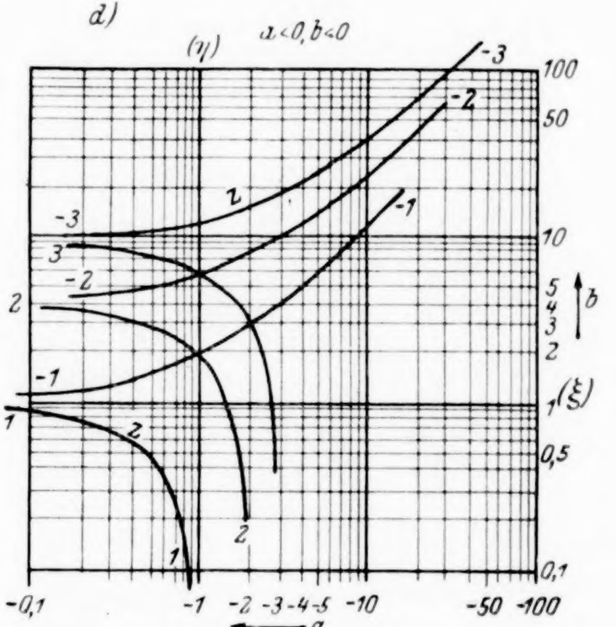


Abb. 4c und 4d.

Die Untersuchung der weiteren Fälle b) bis d), denen die Abbildungen 4 b bis 4 d entsprechen, werde der Übung halber ausführlich besprochen, wenn sich auch durch einfache Substitutionen Vereinfachungen ergäben:

Fall b): $a > 0$, $b < 0$, α) $z > 0$:

Gleichung der Ablesegeraden:

$$y = -xz - z^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve:

$$x = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)},$$

Gleichung der Bezifferung:

$$y = -b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}.$$

Da auf der rechten Seite von (I) das Zeichen $-$ $-$ steht, dem der imaginäre Ast der Geradenbildtafel entspricht, ist für $z > 0$ k e i n Ast in Abb. 4 b vorhanden.

Gleichung der Bezifferung:

$$y = -b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}.$$

In Abb. 4 b ist also der Ast $+$ $-$ für verschiedene z-Stellungen eingezeichnet und nach n e g a t i v e n z-Werten beziffert worden.

Fall c): $a < 0$, $b < 0$, α) $z > 0$:

Gleichung der Ablesegeraden:

$$y = +xz - z^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve:

$$x = -a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)},$$

Gleichung der Bezifferung:

$$y = -b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}.$$

Ast $+$ $-$, nach p o s i t i v e n z-Werten beziffert.

β) $z < 0$: k e i n e Aststellung; wie oben. (Abb. 4 c.)

Fall d): $a < 0$, $b > 0$. α) $z > 0$:

Gleichung der Ablesegeraden:

$$y = -xz + z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

Gleichung der Lösenden Kurve:

$$x = -a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

Gleichung der Bezifferung:

$$y = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III).$$

Ast $-+$, nach positiven z-Werten beziffert.

β) $z < 0$:

Gleichung der Ablesegeraden:

$$y = +x(-z) + z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

Gleichung der Lösenden Kurve:

$$x = -a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

Gleichung der Bezifferung:

$$y = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III).$$

Ast $++$, nach negativen z-Werten beziffert. (Abb. 4d.)

Wie leicht ersichtlich, wird die eben dargelegte Übertragung praktisch wohl nie durchgeführt werden, da ja die Benutzung von Logarithmenpapier Vereinfachungen und nicht Erschwerungen der Tafelkonstruktion bezweckt. Immerhin dürfte sie jedoch theoretisches Interesse beanspruchen, da sie zeigt, wie sich mit Hilfe des logarithmographischen Verfahrens eine Nomographie im logarithmisch geteilten System durchführen läßt.

4. Die Auflösung von Gleichungen mit logarithmischen Gliedern. In einer vor einiger Zeit erschienenen Mitteilung dieses Titels [15]) gibt Herr V. Fischer die zeichnerische Auflösung einer bzw. zweier transzendenten Gleichungen mit logarithmischen Gliedern, indem er dieselben jeweils in Teilsysteme zerfällt, durch deren geometrische Deutung er schließlich die gewünschten Lösungen erhält. Im folgenden soll an den gleichen Beispielen gezeigt werden, daß durch die — an sich wohl nicht neue — Anwendung nomographischer Verfahren ein viel allgemeinerer Weg zur graphischen Gleichungsauflösung führt. Wie bekannt, ist in der Nomographie die Form der Funktionsbeziehung in erster Linie maßgebend, die Bedeutung der einzelnen Funktionssymbole erst in zweiter Linie.

1. Zunächst werde die Gleichung mit einer Unbekannten

$$a\,x \lg x + b\,x + c = 0 \quad (a, b, c \text{ Konstante})$$

behandelt, die die für die Anwendung gebräuchlicher nomographischer Verfahren erforderliche trinomische Form bereits besitzt. Setzt man vorübergehend im zweiten Glied y für x und im dritten z für c, so kann diese Funktionsbeziehung bekanntlich z. B. durch eine Tafel mit drei parallelen Leiternträgern und gerader Ableselinie dargestellt werden, deren letzter sich auf einen Punkt reduziert. Zusammengehörige Wertepaare x und y liegen dann auf einer Geraden, eben der Ablesegeraden. Nimmt man, um die Gleichung nach x aufzulösen, z. B. auf der ersten Leiter, für x verschiedene Werte an, so wird das x auf der zweiten Leiter zunächst nicht auf der Ablesegeraden liegen. Durch Konstruktion einer „Fehlerkurve" (z. B. durch Lotbildung, Abb. 5) wird man im Schnitt derselben mit der zweiten Leiter den gesuchten x-Wert erhalten. Es möge aber darauf nicht näher eingegangen werden.

2. Bei dem System der beiden transzendenten Gleichungen

$$a \lg x + c(1-x)^2 + b \lg y - c(1-y)^2 + d_1 = 0 \,(C_1),$$

$$a \lg \bar{x} + c(1-\bar{x})^2 + b \lg \bar{y} - c(1-\bar{y})^2 + d_2 = 0 \,(C_2),$$

$$\bar{x} = 1 - x,\ \bar{y} = 1 - y,\ a, b, c, d_1, d_2 \text{ Konstante},$$

das Herr V. Fischer nach ziemlich umständlicher Bestimmung zusammengehöriger x, y, bzw. $\bar{x}$, $\bar{y}$ durch Schnittpunktbestimmung von C_1 und C_2 in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem löst, hat jede der beiden Gleichungen C_1 und C_2 die Form

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = 0,$$

$$\text{bzw. } \bar{f}_1(\bar{x}) + \bar{f}_2(\bar{y}) + \bar{f}_3(\bar{z}) = 0,$$

wobei im vorliegenden Fall noch die Besonderheit hinzutritt, daß die Funktionen f_1 und $\bar{f}_1$, bzw. f_2 und $\bar{f}_2$ durch das gleiche Funktionssymbol dargestellt werden. Wie vorhin, ist die Konstruktion einer Tafel mit drei parallelen Trägern, deren letzter wieder in einen Punkt ausartet, für jede der Gleichungen vorteilhaft. Durch die eben erwähnte Besonderheit genügt bereits eine Tafel für beide Gleichungen. (Die beiden Punkte d_1 und d_2 liegen auf einer Parallelen zu den anderen Trägern.)

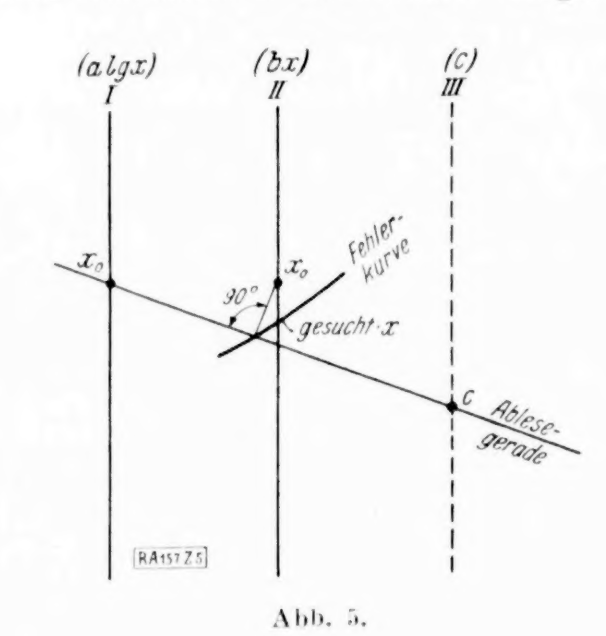


Abb. 5.

Die Konstruktion zusammengehöriger Wertepaare x, y, bzw. $\bar{x}$, $\bar{y}$ ist also sehr einfach, indem man die durch den Punkt d_1 bzw. d_2 gehenden Ablesestrahlen mit den beiden Leitern jeweils zum Schnitt bringt und die x, y- bzw. $\bar{x}, \bar{y}$-Paare aufschreibt. Durch Deutung der hierdurch definierten Kurven z. B. in einem kartesischen Koordinatensystem (wobei natürlich $x = 1 - \bar{x}$, $y = 1 - \bar{y}$ zu berücksichtigen ist), ergibt sich schließlich wie bei Herrn V. Fischer die gesuchte Lösung.

3. Die Größen a, b, c, d_1, d_2 sind veränderlich. Die im vorstehenden gegebenen Verfahren sind nur zweckmäßig, wenn die eben angeschriebenen Größen konstant sind. Sind auch diese veränderlich, so muß zu den nunmehr erforderlichen komplizierteren „kanonischen Formen" geschritten werden.

α) Im Falle einer Veränderlichen ordnet sich, wie ersichtlich, die ausgeschriebene Gleichung nach Division durch a der bekannten Form

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)\,g_1(x) = 0$$

unter, kann also nach einem der Verfahren für diese Form vertafelt werden. Will man die Divi-

[15]) Diese Zeitschrift, Band 7 (1927), Heft 2, S. 160.

sion vermeiden, so läßt sich der in Mitt. I. meiner Arbeit beschriebene „Rechenschieber" durch folgende Zerfällung entwerfen:

Gleichung des Ablesefadens:

$$\eta = b\,\xi + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve und ihrer Bezifferung:

$$\eta = a\,x \lg x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)},$$

$$\xi = x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}.$$

Es trägt also das Grundblatt die nach a zu beziffernde Kurvenschar $\eta = a\,\xi \lg \xi$ und die Parallelenschar $\xi = x$.

β) Interessanter ist der Fall zweier Veränderlicher; es werde aus einleuchtenden Gründen bloß die Gl. (C_1) betrachtet. Schreibt man nach Division durch d_1 (es sind also bei Benutzung der Tafel dann die Größen $a/d_1 = a_1$, $c/d_1 = b_1$ und $r_1 = b/(a\,d_1)$ durch Nebenrechnung zu ermitteln), die Gl. (C_1) in der Form

$$a_1 (\lg x + r_1 \lg y) + b_1 [(1 - x)^2 - (1 - y)^2] + 1 = 0$$

und zerfällt man, in Verallgemeinerung des meinem Verfahren zugrunde liegenden Leitgedankens, die Funktionsbeziehung in die Gleichungsdreiheit:

Gleichung der Ableseebene:

$$a_1\,\xi + b_1\,\eta + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve und ihrer Bezifferung:

$$\xi = \lg x + r_1 \lg y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)},$$

$$\eta = (1 - x)^2 - (1 - y)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)},$$

$$\zeta = r_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)},$$

die man dann in dem kartesischen Koordinatensystem $\xi\,\eta\,\zeta$ deutet, so stellt (I) die zur $\xi\,\eta$-Ebene normale („projizierende") Ebene dar, die in den in den Abständen $\zeta = r_1$ gezogenen Parallelebenen zur $\xi\,\eta$-Ebene in den „Ablesegeraden" der einzelnen Teil-Tafeln ihre „Spuren" besitzt. In jeder solchen Ebene lautet dann die Gleichungsdreiheit:

Gleichung der Ablesegeraden:

$$a_1\,\xi + b_1\,\eta + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(I)},$$

Gleichung der Lösenden Kurve:

$$\eta = (1 - y^{-r_1} e^{\xi})^2 - (1 - y)^2 \quad . \quad . \quad \text{(II)},$$

Gleichung der Bezifferung:

$$\eta = (1 - x)^2 - (1 - x^{-1/r_1} e^{\xi/r_1})^2 \quad . \quad \text{(III)}.$$

Hierbei ist dann für jedes r_1 eine Tafel zu entwerfen. — Ganz analog ist bei der Vertafelung von (C_2) vorzugehen, wobei dann die Größen a_2, b_2, r_2, $\bar{x}$, $\bar{y}$ auftreten. Hierbei ist jedoch zu bedenken, daß, da $r_1 \neq r_2$, für C_2 eine andere Tafel als für C_1 zu benutzen ist.

Hat man also diese Tafelreihe (mit r als Parameter) entworfen, was natürlich nur bei oftmaliger Verwendung zweckmäßig sein wird, so sind wie vorher mit ihrer Hilfe, und zwar nach der bekannten Benutzungsart der Tafeln mit Doppelkotenpunkten und Ablesegerade, zusammengehörige $x\,y$- und $\bar{x}\,\bar{y}$-Paare zu bestimmen und ist dann ganz wie früher vorzugehen.

4. Anwendungsbereich. Wie ersichtlich, führt der gezeigte Weg nicht nur bei den verhältnismäßig einfach gebauten Funktionsbeziehungen von der Form (C_1) und (C_2) zum Ziel. Er dürfte sich gerade bei kompliziert gebauten Formen als einzig gangbar erweisen.

Anmerkungen bei der Korrektur:

Es sei gestattet, die vorstehenden Darlegungen durch einige ergänzenden Zusätze abzurunden:

1. Wie leicht einzusehen, erhält man (vgl. Punkt 2) eine weitere Multiplikationstafel mit Ablesekreis, wenn man die erwähnte Tafel am Kreis S', oder an einem mit ihm konzentrischen, spiegelt.

2. Die in Punkt 4, 3, β angestellten Betrachtungen stellen einen weiteren Versuch einer impliziten Theorie dreidimensionaler Fluchtlinientafeln vor, wie ein solcher bereits vor vielen Jahren von R. Mehmke und A. Adler[1]) in Form ihrer Apparate zur Auflösung mehrgliedriger algebraischer Gleichungen vorgenommen wurde. Es wäre von großem theoretischen Interesse, diese implizite Theorie im drei- und mehrdimensionalen Raum weiter auszubauen, als Gegenstück zu der von E. Lukács[2]) in Angriff genommenen expliziten Theorie.

3. Die in Punkt 4, 1 und 4, 2 dargelegte Weiterbildung des gewöhnlichen graphischen Rechnens auf nomographischer Grundlage hat sich in der Tat, wie ich in mehreren Arbeiten zeigen konnte, als sehr fruchtbar und weittragend erwiesen. Obwohl im Schrifttum an mehreren Stellen bereits vorkommend[3]), hatte dieses Rechenverfahren, das gleichzeitig eine wesentliche Ergänzung der Nomographie darstellt, bisher keine einheitliche Bezeichnung, weshalb ich hierfür die Bezeichnung „Nomographisch-graphisches Rechnen" eingeführt habe[4]).

Unter diesen recht umfassenden Begriff fallen dann z. B. alle jene Verfahren, bei denen auf Nomogrammen, u. zw. Netztafeln, Linienzüge eingetragen werden, also z. B. die verschiedenen „Diagramme" der technischen Thermodynamik. (Auch die in Punkt 1 genannte Dreieckrechentafel wäre in diesem Sinne eigentlich als „Diagramm" anzusprechen, da ja auf ihr die „Energieumwandlungskurve" eingezeichnet wird.) Hierher gehört ferner das „Sinusrelief und Tangensrelief in der Elektrotechnik" von F. Emde, das sich also gewissermaßen als Gegenstück zu den genannten „Diagrammen" der Thermodynamik bzw. der genannten Dreieckrechentafel der Hydrodynamik erweist. Die Heranziehung des nomographisch-graphischen Rechnens führte schließlich zwanglos zu einem allgemeinen Gegenstück aller der genannten Verfahren, nämlich zu den „Integralreliefs" zur Lösung von Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen, wofür des näheren auf meine diesbezügliche Arbeit[5]) verwiesen sei.

Prag. Alexander Fischer. 157

[1]) Vgl. M. d'Ocagne: Traité de Nomographie, 2e éd., Paris 1921, S. 319.

[2]) E. Lukács: 1. Anwendung der mehrdimensionalen Geometrie auf Nomographie. Diese Z. **10** (1930), Heft 5. 2. Über zwei theoretische Fragen der Nomographie und die Anwendung der Transformation von Nomogrammen zur Gewinnung von Fluchttafeln und Flächenschiebern. Diese Z. **12** (1932), H. 4.

[3]) Vgl. P. Luckey: Die Verstreckung (Anamorphose) und die nomographische Ordnung. Diese Z. **4** (1924), H. 1.

[4]) A. Fischer: Über eine Anwendung des nomographisch-graphischen Rechnens auf eine Aufgabe aus der technischen Schwingungslehre. HDI-Mitteilungen des Hauptvereines deutscher Ingenieure in der Tschechoslow. Rep. (Brünn) 1932, H. 14.

[5]) A. Fischer: Über das allgemeine „Integralrelief" zur nomographisch-graphischen Lösung von Randwertaufgaben gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung — das reelle Gegenstück zum „Sinusrelief und Tangensrelief in der Elektrotechnik" von Fritz Emde. HDI-Mitteilungen usw. 1933, H. 1/2.

Die Verwendung nomographischer Methoden zur numerischen Integration von Differentialgleichungen.

Inhalt: An Hand eines Beispiels wird die numerische Integration von Differentialgleichungen mit Hilfe nomographischer Methoden gezeigt.

Wirklichkeitsgetreue Ansätze zur Beantwortung technischer Fragestellungen führen häufig auf Differentialgleichungen, deren geschlossene Integration nicht möglich ist. Zwar lassen sich solche Aufgaben für den bestimmten Einzelfall hinreichend genau mit bekannten rechnerischen oder zeichnerischen Näherungsverfahren lösen. Wenn es sich dagegen um die zahlenmäßige Verfolgung des Einflusses handelt, den die systematische Änderung einer Mehrzahl von Konstanten auf die Veränderlichen des Problems hat, dann wird die wiederholte Anwendung dieser Verfahren recht zeitraubend und mühevoll. Besonders in solchen Fällen wird die Integration durch die Benutzung nomographischer Methoden erleichtert und beschleunigt; aber auch schon bei einmaligen Rechnungen sind diese oft mit Vorteil zu gebrauchen.

Am besten mag das Gesagte ein Beispiel erläutern:

Der Verdichtungsraum einer Dieselmaschine (Abb. 1) sei durch eine Drosselöffnung vom Quer-

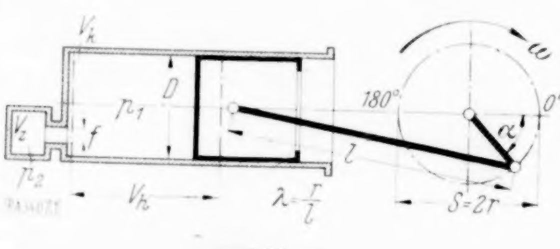


Abb. 1.

schnitte $f\,m^2$ in zwei Teile V_k und $V_z\,m^3$ entsprechend den Teilverdichtungsverhältnissen ε_k und ε_z ($\varepsilon_k = V_k / V_h$; $\varepsilon_z = V_z / V_h$; $\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_z$) geteilt. Durch die Drosselung in der Überströmöffnung f unterscheidet sich der Druck im Zylinder p_1 *at* abs von dem im abgeschnürten Teile p_2 *at* abs. Zu ermitteln ist der Einfluß, den die Änderung des Überströmquerschnittes f und der Aufteilung des Verdichtungsraumes $\varepsilon_k + \varepsilon_z$ auf den Druckverlauf in beiden Räumen abhängig vom Kurbelwinkel α hat.

Aus der Fragestellung ergeben sich zunächst die beiden simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung (s. Automobiltechnische Zeitschrift 1929, S. 723):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,p_1}{d\,\alpha} &= -\,p_1\,\Phi_1 - \frac{1}{\Phi_2}\,p_1^{\frac{3m-1}{2m}} \\ &\sqrt{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m+1}{m}}} = \mathrm{I} - \mathrm{II} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,p_2}{d\,\alpha} &= -\,\Phi_3 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} \frac{d\,p_1}{d\,\alpha} - \Phi_4\,p_2^{\frac{m-1}{m}}\,p_1^{\frac{1}{m}} \\ &= -\,\mathrm{III} + \mathrm{IV} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

mit

$$\Phi_1 = m\,\frac{\pi}{180}\,\frac{f_1'(\alpha)}{f_1(\alpha)}\,;\quad \frac{1}{\Phi_2} = \frac{\mu\,f}{F\,c_m}\,\frac{m}{180\,f_1(\alpha)}\sqrt{\frac{2\,g\,\varkappa\,R\,T_{20}}{\varkappa - 1}}\,;$$

$$\Phi_3 = \frac{f_1(\alpha)}{\varepsilon_z}\,;\quad \Phi_4 = \frac{m}{\varepsilon_z}\,\frac{\pi}{180}\,f_1'(\alpha)\,;$$

$f_1(\alpha) = \varepsilon_k + 0{,}5 + 0{,}125\,\lambda + 0{,}5\cos\alpha - 0{,}125\,\lambda\cos 2\,\alpha$ (m = Polytropen-, $\varkappa$ = Adiabatenexponent, μ = Durchflußbeiwert, R = Gaskonstante des Zylinderinhalts, T_{20} = Verdichtungsanfangstemperatur im abgeschnürten Teilraum.)

Diese sind zu integrieren für verschiedene Werte von f und ε_k und ε_z.

Zur Integration wird für bestimmte Werte von f und ε_k (ε_z) für jede Gleichung eine Fluchtlinientafel (s. Pirani, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik, Sammlung Göschen Nr. 728) gezeichnet (Abb. 2a und 2b). Sie besteht aus je

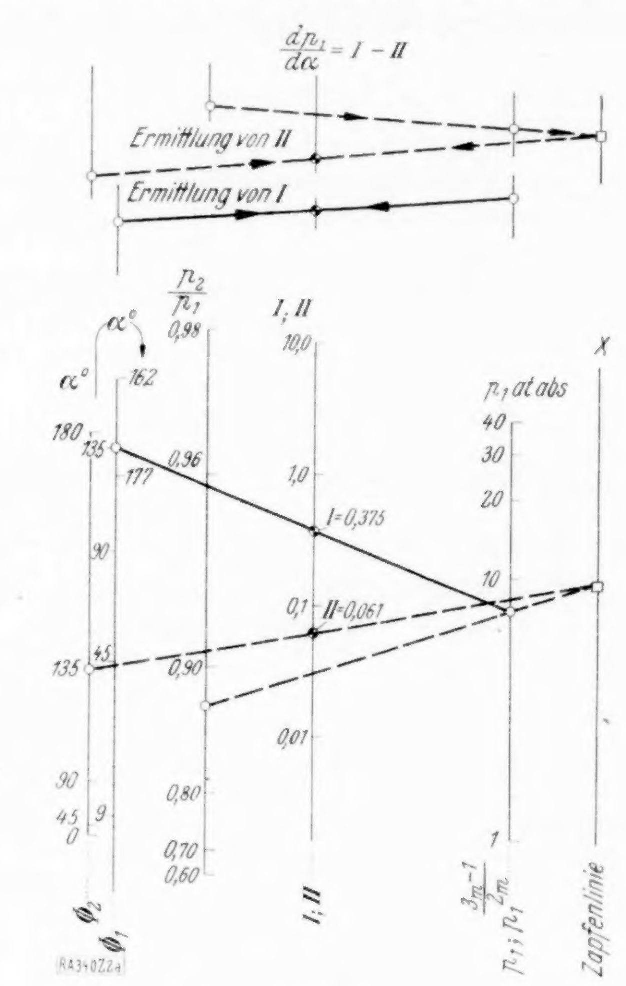


Abb. 2a.

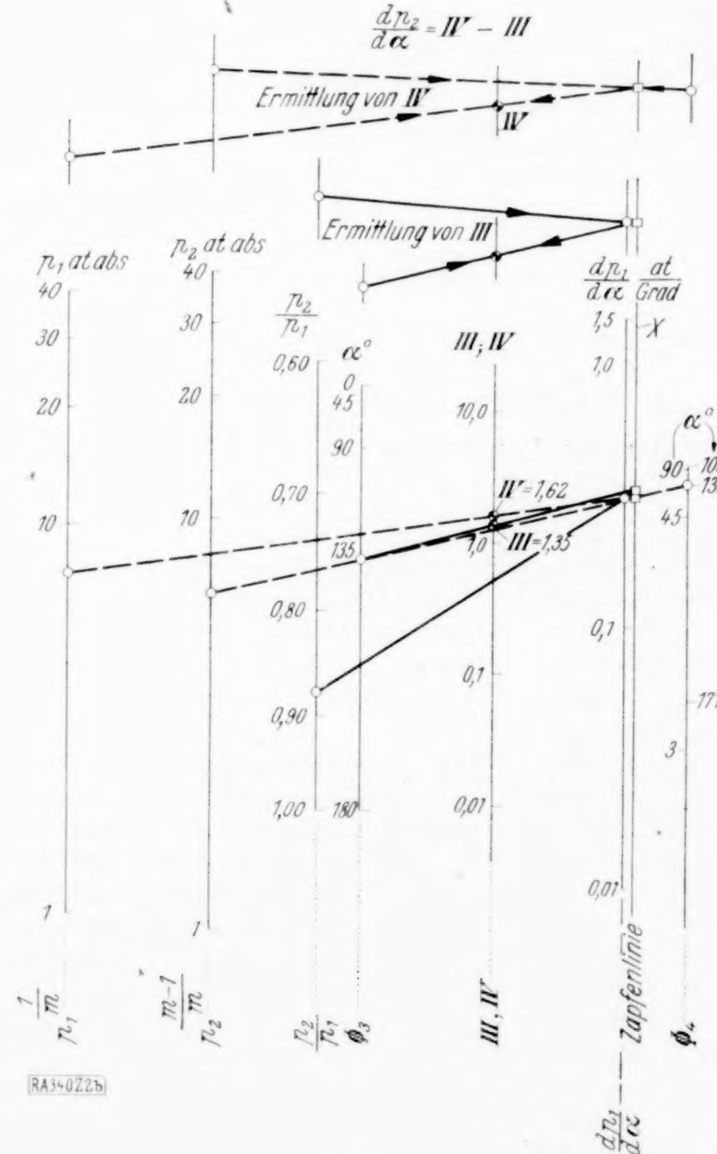


Abb. 2b.

einer Teiltafel zur Ermittlung der Produktwerte I, II und III, IV. Diese lassen sich an der Ergebnisskala einzeln ablesen. Ihre Subtraktion liefert die Differentialquotienten $d\,p_1 / d\,\alpha$ und $d\,p_2 / d\,\alpha$.

Da sich für die Aufzeichnung der Faktoren der einzelnen Produkte logarithmische Skalen ergeben, so erübrigt sich die vorherige zahlenmäßige Ausrechnung der auftretenden Potenzen von p. Die verschiedenen Exponenten erscheinen vielmehr nur als Maßstabfaktoren. Es ist daher möglich, die gleiche Skala für verschiedene Potenzen derselben Größe zu verwenden, ohne die Bezifferung zu ändern. In Abb. 2a wurde für das Produkt $-p_1\,\Phi_1 = \mathrm{I}$ die Skala für $\log\,p_1$ im Maßstab $1 = 20$ cm aufgezeichnet. Für die Größe $p_1^{\frac{3m-1}{2m}}$ im Ausdruck II ergibt sich damit, wenn die gleiche Skala mit derselben Bezifferung verwendet werden soll, der Maßstab $1 = \dfrac{20 \cdot 2\,m}{3\,m - 1}$ cm = (mit $m = 1{,}35$) 17.70 cm, der bei der Berechnung der Abstände der anderen Skalen des Ausdruckes II und ihrer Maßstäbe einzusetzen ist. Durch diese doppelte Verwendung einer Skala wird eine Leiter eingespart und die Übersichtlichkeit der Tafel erhöht (s. auch in Abb. 2b die Verwendung der gleichen Zapfenlinie X für die beiden Ausdrücke III und IV, für beide hier allerdings mit verschiedenem Maßstab. Dieser tritt jedoch nicht in Erscheinung, da er bei Hilfsableselinien nicht interessiert).

Ihrem tatsächlichen Werte nach brauchen nur die Größen Φ, die alle Funktionen des Kurbelwinkels α sind, und der Ausdruck

$$\sqrt{\left|\frac{p_2}{p_1}\right|^{\frac{2}{m}} - \left|\frac{p_2}{p_1}\right|^{\frac{m+1}{m}}}$$

bekannt zu sein, um die entsprechenden logarithmischen Skalen gleich mit dem Werte des Kurbelwinkels α oder des zugehörigen Druckverhältnisses p_2 / p_1 beziffern zu können.

Um die tatsächliche Verwendung des Nomogramms zu zeigen, ist in Abb. 2a und 2b außer dem obenstehenden Verwendungsschlüssel ein Beispiel eingetragen. Mit den beiden Fluchtlinientafeln sei von dem gegebenen Anfangsdrucke ($\alpha = 0^0$) $p_1 = p_2 = 1$ *at* abs ausgehend der Druckverlauf $p_1 = f(\alpha)$; $p_2 = f(\alpha)$ bis $\alpha = 130^0$ ermittelt. Hier sind $p_1 = 5{,}96$ und $p_2 = 5{,}24$ *at* abs. Gesucht sind die beiden Drücke für $\alpha = 135^0$. Graphische Extrapolation des bisher gefundenen Verlaufes führt in Abb. 3 auf die Werte $p_1 = 7.53$ und $p_2 = 6{,}59$ *at* abs. Mit diesen Drücken und dem Winkel $\alpha = 135^0$ ergeben sich die in Abb. 2a und 2b eingetragenen Fluchtlinien. Man liest die Werte ab: $\mathrm{I} = 0{,}375$; $\mathrm{II} = 0\,061$; $\mathrm{III} = 1{,}350$; $\mathrm{IV} = 1{,}620$. Diese führen auf die Werte

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta \alpha} \sim \frac{d\,p_1}{d\,\alpha} = 0{,}314\,;\quad \Delta p_1 = 5 \cdot 0{,}314 = 1{,}57\,,$$

$$\frac{\Delta p_2}{\Delta \alpha} \sim \frac{d\,p_2}{d\,\alpha} = 0{,}270\,;\quad \Delta p_2 = 5 \cdot 0{,}270 = 1{,}35$$

und ergeben für 135^0 die Richtigkeit der angenommenen Drücke

$$p_1 = 7{,}53 = 5{,}96 + 1{,}57 \quad (at\ \mathrm{abs})$$

und

$$p_2 = 6{,}59 = 5{,}24 + 1{,}35 \quad (at\ \mathrm{abs})\,.$$

Stimmen die errechneten Werte nicht mit den ursprünglich angenommenen überein, so wird die Rechnung mit den neuen Werten wiederholt, bis Übereinstimmung erzielt ist. Da nur wenige Fluchtlinien zu ziehen sind, so ist die Wiederholung schnell durchgeführt.

Die Genauigkeit der gewonnenen Druckkurven läßt sich durch Wiederholung der Rechnung oder wenigstens eines Teiles mit verändertem Intervall $\Delta\alpha$ kontrollieren. Die aus den beiden Fluchtlinientafeln erhaltenen Werte können selbstverständlich auch als Ausgang zur Aufstellung eines Differenzenschemas genommen werden, wenn die Genauigkeit dadurch gesteigert werden soll, daß auch noch Differenzen höherer Ordnung berücksichtigt werden.

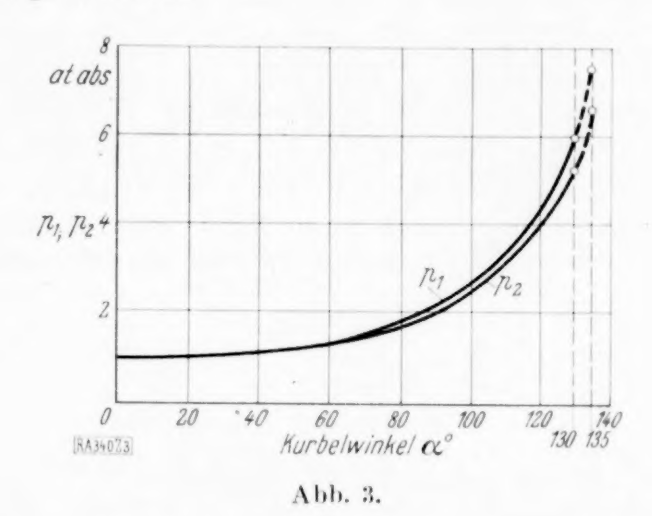


Abb. 3.

Wenn die Rechnung für eine andere Aufteilung des Verdichtungsraumes oder einen anderen Überströmquerschnitt durchgeführt werden soll, dann ändert sich an allen p enthaltenden Skalen nichts. Lediglich die vier Skalen für Φ müssen anders beziffert werden. Denn nur diese Funktionen enthalten die geänderten Größen f, ε_k, ε_z. Da diese Neubezifferung sehr schnell durchzuführen ist, so sind die Nomogramme sofort für die neue Integration verwendungsfähig. U. U. kann auch noch die Subtraktion der Werte I und II und III und IV graphisch durchgeführt werden.

Die am Beispiel beschriebene Methode läßt sich auch in vielen anderen Fällen mit Vorteil anwenden, da sie die Rechnung vereinfacht und Zeit spart.

(Aus dem Institut für Verbrennungs-Kraftmaschinen und technische Wärmelehre der Technischen Hochschule Hannover.)

Hamburg. H. Mehlig, VDI. 340

Kompatibilitätsgleichungen bei Zylinderkoordinaten. Da ich die Kompatibilitätsgleichungen auf Zylinderkoordinaten transformiert in der Literatur vermisse, mögen sie hier für künftigen Hinweis kurz mitgeteilt werden. Es möge ein Zylinderkoordinatensystem r, ϑ, z zugrunde gelegt werden.

Die sechs Kompatibilitätsgleichungen, die bekanntlich das Verschwinden des Riemann-Christoffelschen Krümmungstensors des dreidimensionalen Raumes ausdrücken, sind homogene Beziehungen zwischen den Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Verformungskomponenten, also hier von ε_r, ε_ϑ, ε_z, $\gamma_{\vartheta z}$, γ_{zr}, $\gamma_{r\vartheta}$. Bei der gewöhnlichen Beschränkung auf kleine Verschiebungen werden die Gleichungen linear. Sie werden am einfachsten dadurch gewonnen, daß man die Verschiebungskomponenten u, v, w zwischen den Gleichungen

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

$$\gamma_{\vartheta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \vartheta} \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$$\gamma_{z r} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

$$\gamma_{r \vartheta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

eliminiert.

Um die Elimination systematisch durchführen zu können, empfiehlt es sich, sich die entsprechende Elimination im Falle rechtwinkliger Koordinaten zu erinnern, was durch die in Klammern eingeführte Bezifferung erleichtert werden soll.

Durch Kombination der links in Klammern stehenden Gleichungsnummern sind so entstanden:

$$\begin{pmatrix} 3,1 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{z r}}{\partial r \, \partial z} \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{II}),$$

$$\begin{pmatrix} 1,2 \\ 6 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \vartheta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\vartheta}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 (r \gamma_{r \vartheta})}{\partial r \, \partial \vartheta} \quad . \quad (\mathrm{III}),$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 4,5,6 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}\, r \left\{ r \frac{\partial \gamma_{r \vartheta}}{\partial z} + \gamma_{\vartheta z} - r \frac{\partial \gamma_{\vartheta z}}{\partial r} + \frac{\partial \gamma_{z r}}{\partial \vartheta} \right\} \\ - 2 \frac{\partial \gamma_{z r}}{\partial \vartheta} = 2 r \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \vartheta \, \partial z} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{IV}),$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5,6 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ r \frac{\partial \gamma_{r \vartheta}}{\partial z} + \gamma_{\vartheta z} - r \frac{\partial \gamma_{\vartheta z}}{\partial r} - \frac{\partial \gamma_{z r}}{\partial \vartheta} \right\} \\ = - 2 \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r \, \partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \vartheta} \right\} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{VI}).$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{\partial (r \varepsilon_\vartheta)}{\partial r} - \varepsilon_r = \frac{\partial^2 v}{\partial r \, \partial \vartheta} \quad \ldots \ldots \quad (2'),$$

und alsdann, analog wie vorher,

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2' \\ 4,5,6 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \frac{\partial (r \gamma_{\vartheta z})}{\partial r} - \frac{\partial \gamma_{z r}}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial \gamma_{r \vartheta}}{\partial z} \right\} \\ = 2 r \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial (r \varepsilon_\vartheta)}{\partial r} - \varepsilon_r \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (\mathrm{V}).$$

Um die letzte Kompatibilitätsgleichung zu bekommen, bilden wir zunächst die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2',3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varepsilon_z}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{\partial (r \varepsilon_\vartheta)}{\partial r} - \varepsilon_r \right\} = \frac{\partial^3 \gamma_{\vartheta z}}{\partial r \, \partial \vartheta \, \partial z} .$$

Durch Benutzung der Gleichung $\begin{pmatrix} 3,1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und einmalige Integration nach r (wobei die auftretende arbiträre Funktion von ϑ und z wegen der notwendigen Homogenität der Gleichungen identisch verschwinden muß) ergibt sich schließlich

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \vartheta^2} + r \frac{\partial^2 \varepsilon_\vartheta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{z r}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} = \frac{\partial^2 \gamma_{\vartheta z}}{\partial \vartheta \, \partial z} \quad . \quad (\mathrm{I}).$$

Die Gleichungen (I) . . . (VI) sind die gesuchten Kompatibilitätsgleichungen. Ihre Notwendigkeit folgt aus der Herleitung, und ihre lineare Unabhängigkeit ist unmittelbar einleuchtend. Daß sie auch für die Existenz der Funktionen u, v, w hinreichend (bis auf eine triviale Schraubenbewegung bestimmt) sind, soll nicht hier bewiesen werden. Dies folgt übrigens aus der oben angedeuteten differentialgeometrischen Bedeutung der Gleichungen.

Stockholm. F. K. G. Odqvist. 321

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Herausgeg. von der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik". Zweiter Band. Berlin 1933, Verlag von Julius Springer.

3. Heft: A. **Kolmogoroff,** Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. IV + 62 S. Preis 7,50 M.

4. Heft: A. **Khintchine,** Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. V + 77 S. Preis 9,60 M.

5. Heft: C. C. **MacDuffee,** The Theory of Matrices. V + 110 S. Preis 13 M.

Von den neu erschienenen drei Heften des 2. Bandes der „Ergebnisse" behandeln die beiden ersten wichtige Kapitel der Wahrscheinlichkeitsrechnung. A. Khintchine gibt eine übersichtliche Darstellung der Grenzwertsätze, die von dem bekannten Laplaceschen Satz über die Wahrscheinlichkeit der Summe unabhängiger Größen ihren Ausgang nehmen. Zu den mannigfachen Verallgemeinerungen und Ergänzungen, die dieser Satz gefunden hat, hat der Verfasser selbst mehrfach wesentliche Originalbeiträge geliefert. Vor allem stammt von ihm der schöne Satz „vom iterierten Logarithmus". In dem Referat wird auch ausführlich auf das Problem der Diffusion eingegangen, das durch Grenzübergang zu einer kontinuierlichen Aufeinanderfolge von Kollektivs (oder, wie der Verfasser sagt, von stochastischen Prozessen) entsteht.

A. Kolmogoroff entwickelt eine Art Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Genau genommen werden nur Axiome aufgestellt, die den Bereich der zugelassenen Verteilungen im mathematischen Sinne abgrenzen. (Verteilung oder, wie der Verfasser sagt, Wahrscheinlichkeitsfeld, heißt die Gesamtheit der Wahrscheinlichkeiten innerhalb eines Kollektivs.) Über die Operationen, deren Durchführung den eigentlichen Inhalt der Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet, wird axiomatisch nichts ausgesagt. In diesem Sinne ist wohl auch der Satz des Verfassers zu verstehen: „Unser Axiomensystem ist aber unvollständig: in verschiedenen Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet man verschiedene Wahrscheinlichkeitsfelder." Im übrigen läßt an dieser Stelle wie an mancher andern die Übersetzung an Klarheit zu wünschen übrig. Auf eine Kritik der sachlichen Entwicklungen des Verfassers kann naturgemäß an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Es muß genügen, hier festzustellen, daß dieser kurze Abriß über die Grundbegriffe zusammen mit dem Khintchineschen Referat über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu den wichtigsten Veröffentlichungen auf diesem Gebiet gehört, wenn man die gesamte mathematische Literatur der letzten Jahre in Betracht zieht.

Dr. HEINRICH **BLASIUS,** Studienrat an den Techn. Staatslehranstalten zu Hamburg, Mechanik. Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. 1. Teil: Statik. VIII + 178 S. m. 191 Fig. Preis geb. 6,75 M. 2. Teil: Elastizität und Festigkeit. VIII + 143 S. m. 124 Fig. Preis geb. 5,70 M. Hamburg 1932 und 1933, Boysen & Maasch.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, ohne Verwendung der höheren Mathematik nicht nur die Statik, was leicht möglich ist, sondern auch die Grundsätze der Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Biegung, Torsion usf. zu behandeln. Die Bücher sind mit außerordentlicher Sorgfalt verfaßt, mit einem reichen Material an rechnisch durchgeführten Beispielen versehen und geben Zeugnis von großem pädagogischen Geschick. Man wird im Rahmen der gestellten Aufgabe und der beschränkten Hilfsmittel die Sache nicht leicht besser machen können.

W. A. **SHEWHART,** Ph. D., Member of the Technical Staff Bell Telephone Laboratories, Inc., Economic Control of Quality of Manufactured Product. 1931. Macmillan & Co., Limited, St. Martin's Street, London. XIV + 501 S. mit ca. 150 Abb. u. Tabellen. Preis 30/—sh.

In der letzten Zeit häufen sich die Bücher, die der statistischen Behandlung von Fragen der industriellen Produktion gewidmet sind. Das vorliegende Werk geht etwas ausführlicher auf die theoretischen Grundlagen ein als manches der früher erschienenen deutschen Bücher. Die in der Praxis auftretenden Fragen sind mit einer gewissen Vollständigkeit behandelt. Zu wünschen wäre eine etwas weniger apodiktische Darstellungsform, da der wahrscheinlichkeitstheoretisch Ungeschulte ohnehin leicht dazu neigt, bei der Übertragung von Rechnungsergebnissen auf die Praxis zu viel Optimismus zu zeigen. Die dem Buche angefügten Zahlentabellen sind kaum mit der Lupe lesbar.

T. **LEVI-CIVITA,** Prof. a. d. Univ. Rom, Mitglied des Instituts, Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes. Aus dem Italienischen ins Französische übersetzt von M. Brelot. Paris 1932, Librairie Félix Alcan. X + 114 S. Preis ffrcs. 20.

In wunderbarer Weise versteht es der Verfasser, mit kurzen, eiligen Schritten von den einfachen Sätzen der Theorie der Charakteristiken partieller Differentialgleichungen zu den schönsten Anwendungen der Wellenlehre vorzudringen. Nicht nur hydrodynamische und elastische Wellenbewegungen werden betrachtet, sondern auch die Ausbreitung des Lichtes und der Elektrizität, und schließlich fallen einige besonders eindrucksvolle Bemerkungen über das Problem der Dualität zwischen Wellen- und Corpusculartheorie.

Dr.-Ing. C. **PFLEIDERER,** Prof. an der Techn. Hochschule Braunschweig. Die Kreiselpumpen. 2., verb. Aufl. Berlin 1932, Verlag Julius Springer. IX + 454 S. mit 338 Textabb. Preis geb. 29,50 M.

Gegenüber der ersten Auflage, die hier ausführlich angezeigt wurde[1]), ist der Inhalt und Umfang des Buches beträchtlich vermehrt worden. Dabei sind fast alle Teile erweitert und mit Rücksicht auf die Fortschritte des Kreiselpumpenbaues ergänzt worden. Die Darstellung ist ganz auf den Ingenieur der Praxis zugeschnitten, theoretische Gesichtspunkte, namentlich die Überlegungen der neueren Strömungsforschung, treten in den Hintergrund. Bemerkenswert ist, daß in einem Anhang auch die neuen Bauarten sog. selbstsaugender rotierender Pumpen Besprechung gefunden haben.

v. Mises. 409

T. **BONNESEN** u. W. **FENCHEL,** Theorie der konvexen Körper. (Ergebn. d. Math. u. ihr. Grenzgebiete, hrsg. v. d. Schriftltg. d. Zentralblattes für Mathematik, Bd. III, H. 1.) VII + 164 S. Berlin 1934, Julius Springer. Preis geh. 18,80 M.

Wenn der Ingenieur in der Erkenntnis, daß die technische Wissenschaft heute in ein ähnlich enges Verhältnis zu mathematischen Theorien höchsten Ranges getreten ist wie in den drei vergangenen Jahrhunderten die Himmelsmechanik, sich darüber unterrichten will, was etwa in der reinen Mathematik heute außerhalb des sofortiger Anwendung fähigen Stoffes getrieben wird, so bietet ihm die Theorie der konvexen Körper ein Glanzstück moderner geometrischer Forschung dar. Diese Theorie wird in dem Buche von Bonnesen und Fenchel in einer konzentrierten und strengen Form gegeben, die zwischen Lehrbuch und enzyklopädischem Berichte die Mitte hält; sie ist aber so dargestellt, daß nicht nur der Spezialist mit Leichtigkeit die anziehenden Hauptergebnisse verstehen und eine mathematische Feierstunde mit ihrer Betrachtung füllen kann.

D. J. **STRUIK,** Theory of Linear Connections. (Ergebn. d. Math. u. ihr. Grenzgebiete, hrsg. v. d. Schriftltg. d. Zentralblattes für Mathematik, Bd. III, H. 2.) VII + 68 S. Berlin 1934, Julius Springer. Preis geh 8,60 M.

Das Buch gibt in enzyklopädischer Darstellung einen vielseitigen und klaren Überblick über die Theorie der linearen Übertragungen in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Durch die Bedeutung, die die Riemannsche Geometrie und der affine Zusammenhang in der allgemeinen Relativitätstheorie haben, ist dieser Theorie eine außerordentliche Verallgemeinerung zuteil geworden und sie hat sich zu einer der umfangreichsten der heutigen Mathematik entwickelt. Ein Leser, der die einfachsten Grundbegriffe der Übertragungstheorie beherrscht und vor den mit Indizes reich ausgestatteten Symbolen nicht zurückschreckt, wird sich in dem Buche leicht über jede wichtige, einschlägige Frage, insbesondere über den formalen Teil der Theorie orientieren und wird in den Stand versetzt werden, in die (vollständig aufgeführte) Originalliteratur einzudringen. — So wichtig das Gebiet für die moderne Physik (Relativitätstheorie und Quantenmechanik) geworden ist und so großes Interesse ihm als rein mathematischem Gegenstande zukommt, so darf man es doch als außerhalb der Ingenieurmathematik stehend bezeichnen.

H. **BEHNKE** u. P. **THULLEN,** Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. (Erbgebn. d. Math. u. ihr. Grenzgebiete, hrsg. v. d. Schriftltg. d. Zentralblattes für Mathematik, Bd. III, H. 3.) VII + 115 S. Berlin 1934, Julius Springer. Preis geh. 13,80 M.

Während in manchen Teilen der Geometrie eine der Verallgemeinerung auf n Dimensionen fähige Formulierung der Ergebnisse erst deren volle Harmonie offenbart und sie tieferen Zusammenhängen einordnet, stellen sich dem Übergange von einer zu zwei und mehr unabhängigen Veränderlichen in der Theorie der analytischen Funktionen große, unüberwundene Schwierigkeiten entgegen, die eng mit den entsprechenden Fragen der Topologie zusammenhängen. Erst in den letzten Jahrzehnten ist diese Theorie in den Mittelpunkt mathematischen Interesses gerückt, und die Ergebnisse, um die sie bereichert worden ist, gehören zu den schönsten dieses Zeitraumes. Sie werden hier mit Ausschluß derjenigen über spezielle Funktionsklassen in einer bisher nicht erreichten Übersichtlichkeit und Vollständigkeit unter zum Teil neuen Gesichtspunkten entwickelt.

Dresden. W. Threlfall. 434

[1]) Bd. V (1925), S. 177.

Dr.-Ing. ERNST **LEHR,** V. D. I. Berlin, Schwingungstechnik. Zweiter Band. Schwingungen eingliedriger Systeme mit stetiger Energiezufuhr. XII + 373 S. m. 243 Textabbildungen. Berlin 1934. Verlag von Julius Springer. Preis geh. 30.— M., geb. 31,50 M.

Das Buch behandelt im wesentlichen die erzwungenen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrade für den Spezialfall periodischer Erregung. Mechanische und elektrische Schwingungen werden nebeneinander behandelt, so daß ihre Analogie in Erscheinung tritt und die Anwendbarkeit der den Elektrotechnikern geläufigen Methoden (insbesondere des Vektordiagramms in der komplexen Zahlenebene) auf mechanische Schwingungsvorgänge deutlich wird. Das Buch ist mit sichtlicher Begeisterung für die Sache geschrieben und enthält eine Reihe wertvoller Beispiele aus der technischen Praxis. (Siehe z. B. das Beispiel einer schwingenden Förderrinne auf S. 223.) — Daß der Verfasser vor allem die Bedürfnisse des für die Praxis rechnenden Ingenieurs im Auge hat, ist ein Vorzug des Buches. Es verführt ihn aber stellenweise zu einer Darstellung, die zu Bedenken Anlaß gibt. Ich möchte beispielsweise auf zwei Punkte hinweisen. 1. Als Erregerkräfte für die erzwungenen Schwingungen betrachtet der Verfasser in erster Linie die Reaktionskräfte nicht ausgeglichener rotierender Massen. Bei hinreichend kleinen Amplituden der auf diese Weise erzeugten Schwingungen kann man näherungsweise so rechnen, als ob die Rotationsachse der rotierenden Massen fest bliebe und die Zentrifugalkräfte wie eingeprägte Kräfte wirkten. Dieses Verfahren, das auch der Verfasser anwendet, sollte aber ausdrücklich als Näherungsverfahren gekennzeichnet sein, und der Gültigkeitsbereich desselben sollte abgeschätzt werden. Dann würde z. B. der Übelstand vermieden, daß auf S. 27 die Formel 34 im Widerspruch ist mit der richtigen Bemerkung, daß der Gesamtschwerpunkt des dort betrachteten Systems in Ruhe ist. Das einfachste wäre in diesem Falle, unter Verzicht auf Näherungsbetrachtungen die Bewegungsgleichungen exakt hinzuschreiben; man bekommt auch dann nur die klassische Form der Schwingungsgleichung. 2. Auf S. 21 wird in Analogie zum Ohmschen Gesetze für die Bewegung eines hin und her bewegten Schwungrades eine Gleichung: „Antriebsmoment = Winkelgeschwindigkeit mal Drehmassenwiderstand" abgeleitet, die zwar im speziellen Falle richtig ist, wenn man die ziemlich gewaltsame Definition des „Drehmassen-Widerstandes" akzeptiert, die aber m. E. eine Übertreibung der Analogiebetrachtungen darstellt. Durch solche Dinge wird die so einfache Mechanik der Schwingungsvorgänge eher verwirrt als verdeutlicht.

Diese Bemerkungen mögen hier genügen, um die Ansicht des Referenten zu begründen, daß das Buch demjenigen die besten Dienste leisten wird, der in den Grundlagen der Mechanik sattelfest ist und der praktischen Aufgaben der Schwingungslehre gegenübersteht.

Trefftz. 436

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Ing. K. **KONETSCHNY,** Einrichtung der Instrumente für die optische Längenmessung und für das tachymetrische Meßverfahren. Brünn 1933, Verlag Rudolf M. Rohrer. 92 S. m. 66 Abb. Preis 4 M.

GILBERT AMES **BLISS,** Prof. of Mathematics, the University of Chicago, Algebraic Functions. Published with the Cooperation of the National Research Council. American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XVI. New York 1933. IX + 216 S. m. viel. Abbildungen.

W. **SWIETOSLAWSKI,** Prof. de Chimie Physique à l'Ecole Polytechnique de Varsovie, Thermochimie. Préface de Georges Urbain, Membre de l'Institut. Traduit par M. THON. Paris 1933, Librairie Félix Alcan. XIX + 379 S. m. 40 Abb. Preis geb. 60 frs.

H. **KAYSER,** Prof. d. Physik a. d. Un. Bonn, und H. **KONEN,** Prof. d. Physik a. d. Un. Bonn, Handbuch der Spectroscopie. VII. Bd., 3. u. letzte Lieferg. Unt. Mitwirkg. v. Dr. Hedfeld, Dr. Hese, Dr. Scheib, Dr. Johann, Frl. Dr. v. Mathes. Leipzig 1934, Verlag von S. Hirzel. 723 S. Preis geh. 80 M. (Umfang des VII. Bandes — enthält 3 Lieferungen — XIV + 1473 S. Preis brosch. 132,20 M., geb. 141 M.)

Mitteilungen aus den Forschungsanstalten des Gutehoffnungshütte-Konzerns. Band 2, Heft 9. Düsseldorf, November 1933. In Komm. beim VDI-Verlag, Berlin. 28 S. m. 40 Abb. u. 3 Zahlentaf. Preis brosch. 3,15 M.

ERNST **KOHLER,** Georg von Reichenbach. Das Leben eines deutschen Erfinders. 140 S. m. 11 Bildtaf. München 1933. Verlag Knorr & Hirth. Preis geh. 3,70 M., geb. 4,70 M.

Dr.-Ing. KURT **BERNHARD,** Bemessungsbuch für Eisenbeton. Anleitung, Formeln und Tabellen zum wirtschaftlichen Bemessen von Eisenbetonquerschnitten. 182 S., darunter 113 Tabellenseiten, 88 Fig., 84 Zahlenbeispiele. München und Berlin 1933, R. Oldenbourg. Preis geb. 22 M.

Dr. KARL **MENNINGER,** Zahlwort und Ziffer. Aus der Kulturgeschichte unserer Zahlsprache, unserer Zahlschrift und des Rechenbretts. X + 365 S. m. 170 Abb. Breslau 1934, Ferdinand Hirt. Preis geh. 7 M, geb. 9 M.

Dr. phil. A. **TIMPE,** o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Einführung in die Finanz- und Wirtschaftsmathematik. IV + 217 S. m. 70 Textabb. Berlin 1934, Julius Springer Verlag. Preis kart. 9 M.

F. A. VENING **MEINESZ,** Ergebnisse der Schwerkraftbeobachtungen auf dem Meere in den Jahren 1923—1932. (Sond.-Druck a. Ergebn. d. kosm. Physik, Bd. 2.) 60 S. m. 7 Fig. u. 4 Kart. Leipzig 1934, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis brosch. 5 M.

Dipl.-Ing. Dr. ZOLTÁN **KERTESZ,** Turda (Siebenbürgen), Rechnerische Betrachtungen über Verbrennungsvorgänge und Absaugverluste bei Feuerungen, insbesondere bei Kalk- und Zementöfen. 72 S. m. 25 Abb. Halle (Saale) 1934, Verlag von Wilhelm Knapp. Preis brosch. 4,80 M., geb. 6 M.

Dr. KAZIMIERZ **BARTEL,** Prof. a. d. Techn. Hochschule in Lemberg, Malerische Perspektive. Grundsätze, Geschichtlicher Überblick, Ästhetik. Bd. I. Deutsch hrsg. v. Dr. W. HAACK, Priv.-Dozt. f. Math. a. d. Techn. Hochsch. Danzig-Langfuhr. VIII + 339 S. m. 404 Abb. im Text. Leipzig u. Berlin 1934, Verlag von B. G. Teubner. Preis geb. 16 M.

Compositio Mathematica. Periodicum Internationale. Administrant: L. BIEBERBACH, Berlin, L. E. J. BROUWER, Amsterdam, Th. DE DONDER, Bruxelles, G. JULIA, Paris, B. M. WILSON, St. Andrews. Vol. I. Fasc. 1. (25. I. 34.) 192 S. Groningen 1934, P. Noordhoff. Preis des Jahrganges 20 holl. fl.

NACHRICHTEN

Jarl Waldemar Lindeberg zum Gedächtnis.

Der Name des finnischen Mathematikers J. W. Lindeberg ist in den letzten Jahren in den an der Wahrscheinlichkeitstheorie interessierten Kreisen sehr bekannt geworden. Die „Lindebergschen Bedingungen" haben, wie z. B. A. Khitchine in seiner kürzlich erschienenen Monographie Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeit. Seite 2, sagt, in den letzten Jahren immer größeren Beifall gefunden. Auch v. Mises zitiert Lindeberg öfter. Aus dem Anfang November 1933 erschienenen Heft 3 des Jahrgangs 1933 der „Skandinavisk Aktuarietidskrift erfährt man durch einen kurzen, auf die einzelnen Arbeiten nicht eingehenden, in schwedischer Sprache von F. Nevalinna veröffentlichten Nachruf, daß J. W. Lindeberg am 25. Dezember 1932 im Alter von 56 Jahren nach längerer Krankheit gestorben ist. Lindeberg hat in Helsingfors studiert Er war an der Universität, der Technischen Hochschule und in einer Schule tätig; er war auch Mitglied der finnischen Gesellschaft für Wissenschaften und der finnischen Akademie.

Die Arbeit, auf die Khitchine sich bezieht, ist 1922 in der Mathematischen Zeitschrift, Band 15, erschienen unter dem Titel „Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Unterliegt die zufällige Veränderliche x dem normierten Verteilungsgesetz $U(x)$ und ist X die Summe von n zufälligen Veränderlichen x_1 $x_2 \ldots x_n$ mit den Verteilungsgesetzen $F_1(x)$, $F_2(x) \ldots F_n(x)$, dann besagt die Lindebergsche Bedingung: Wenn $\int\limits_{|x|>\tau}^{\infty} x^2\, d\, F_k(x) < \lambda\, b_k \; (k = 1, 2, \ldots u)$ mit $\int\limits_0^{\infty} x^2\, d\, F_k(x) = b_k$, dann ist für alle x $|U(x) - \Phi(x)| < 2\varepsilon$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es, wenn die Bedingung erfüllt ist, zwei positive Zahlen τ und λ. $\Phi(x)$ bedeutet die Gauß-Laplacesche Verteilung $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, d\, u$, die übrigens nach Pearson schon auf Moivre zurückzuführen ist[1]).

Hat diese Arbeit, deren Ergebnisse Lindeberg auch an anderen Stellen veröffentlicht hat, rein theoretisches Interesse, so gibt es von ihm aber auch Arbeiten, die für den Statistiker von großem praktischem Nutzen sind. In einer 1925 in der Skand. Aktuarietidskrift veröffentlichten Arbeit „Über die Begriffe Schiefheit und Exzeß in der mathematischen Statistik" übt er an den von Pearson und Charlier eingeführten Maßen $\frac{M - D}{\mu}$ bzw. $-\frac{1}{2}\frac{M_3}{\mu^3}$ Kritik. (M arithmetisches Mittel, D dichtester Wert, μ Streuung, M_3 drittes um das arithmetische Mittel gebildete Moment.) Der dichteste Wert ist bei stetigen Kollektiven oft sehr unsicher zu bestimmen. Das Charliersche Maß ist zu kompliziert, um den Bedürfnissen mathematisch Ungeübter zu dienen. Man kann auch, was Lindeberg an einem von Charlier gegebenen Beispiel zeigt, zu unrichtigen Schlüssen kommen, wenn man mit der Charlierschen Schiefheit irgendeine bestimmte Vorstellung über die Verteilung verbindet.

Lindeberg legt folgendes einfache Maß vor: es sei P die Anzahl der Veränderlichen in Prozenten des Umfanges des Kollektives, die größer als der Mittelwert M sind; die Schiefheit ist dann definiert durch $S = P - 50$.

Für den Exzeß gibt er die Definition $E = p - 100\lambda$; hierbei bedeutet p die in Prozenten ausgedrückte Zahl der Veränderlichen zwischen $M - \frac{\mu}{2}$ und $M + \frac{\mu}{2}$; λ ist durch das Gaußsche Gesetz definiert $\lambda = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} d\, x}{\sqrt{2\pi}}$. Für die Praxis genügt aber $\lambda = 0.383$, so daß also der Lindebergsche Exzeß $E = p - 38.3$ ist mit einem ebenfalls von Lindeberg berechneten mittleren Fehler $\frac{30}{\sqrt{n}}$.

Auf die Bedeutung dieser Lindebergschen Arbeit besonders für die Statistik in der Biologie hat A. Walther in derselben Zeitschrift aufmerksam gemacht: zum Lindebergschen Exzeß in der Mathematischen Statistik (1927), Seite 246 bis 253. Walther verallgemeinert auch etwas den Begriff.

Am Korrelations-Koeffizienten, dem nicht die zentrale Bedeutung zukommt, die man ihm oft beilegt, übt Lindeberg in einer Arbeit im Nordic statistik. Journal Vo. 1 (1929), Seite 137 bis 141 Kritik: Some Remarks on the Mean Error of the Percenty of Correlation. Darüber hat er auch auf dem 6. Skandinavischen Mathematiker-Kongreß 1925 vorgetragen. An Stelle des Korrelations-Koeffizienten schlägt Lindeberg das einfache Maß $100\,p - 50$ vor, wo p die Wahrscheinlichkeit für die positiven Produkte $(x_i - x_k)(y_i - y_k)$ ist. Bedeutet m die beobachtete Zahl der positiven Produkte, n den Umfang des Kollektivs, so ist $\bar{p} = \frac{2\,m}{n(n-1)}$ ein brauchbarer Wert, dessen mittleren Fehler Lindeberg auch berechnet.

Andere Arbeiten Lindebergs gehören der reinen Mathematik an[2]). Jedenfalls bestätigen schon die erwähnten Arbeiten aus mathematischer Statistik das Urteil Nevalinnas über Lindeberg: Lindebergs Arbeiten offenbaren eine höchstentwickelte, kultivierte und kritische Intelligenz.

Frankfurt a. M., 16. Dezember 1933.

W. Lorey. 432

ERNST A. BRAUER †.

Geh. Hofrat Dr. Ing. e. h. Brauer, em. ord. Professor der theoretischen Maschinenlehre, ist am 17. Februar d. J. im Alter von 83 Jahren zu Karlsruhe verschieden. Am 3. Juni 1851 zu Dresden geboren, studierte er am Polytechnikum seiner Vaterstadt und an der Berliner Gewerbeakademie Maschinenbau und wurde nach praktischer Betätigung in mehreren Maschinenfabriken 1875 Assistent von Reuleaux an der Gewerbeakademie Berlin, wo er bis 1883 als Privatdozent wirkte. War durch die Arbeiten von Clapeyron, Hirn und Zeuner der Kreisprozeß in der Dampfmaschine wissenschaftlich weitgehend unterbaut und erforscht worden, so stellte der 1877 zum erstenmal durch Otto heraus-

[1]) Vgl. z. B. H. L. Rietz: Mathematical Statistics. The Carus Mathematical Monographs. Number Three. S. 47.

[2]) In Poggendoffs Biog.-liter. Handwörterbuch, Bd. V, S. 748 befindet sich eine bis 1922 reichend auf eigener Mitteilung Lindebergs beruhende Bibliographie.

gebrachte Viertakt-Gasmotor, der als Kraftquelle im Kleingewerbe rasch Eingang fand, die Technik vor die Notwendigkeit, auch diese neue Kraftmaschine einer thermodynamischen Diagnose zu unterwerfen. Brauer hat hier gemeinsam mit Slaby durch seine „Versuche über Leistung und Brennmaterialverbrauch von Kleinmotoren" (Berlin 1879) bahnbrechende Arbeit geleistet. Das von Brauer erfundene Bremsdynamometer ermöglichte bei diesen Versuchen durch die selbsttätige Regelung der Bremsbandspannung erstmals eine in engsten Grenzen konstante Maschinenbelastung. Gleich bedeutungsvoll für die Meßtechnik wie dieses Dynamometer war die von Brauer später eingeführte Danaide zur Messung der Mengen strömender Flüssigkeiten sowie die Brauersche Getreidewage, die in etwas veränderter Form noch heute zur Bestimmung des Raumgewichts aus kleinen Probewägungen benützt wird. Mit der Schrift „Konstruktion der Wage" schuf Brauer die Grundlage nicht nur für den Wagenbau, sondern auch für die Herstellung eines großen Teiles unserer Materialprüfungsmaschinen.

1883 folgte Brauer einem Ruf an die Technische Hochschule Darmstadt als ord. Professor der theoret. Maschinenlehre; 1892 übernahm er den Lehrstuhl F. Grashofs an der Technischen Hochschule Karlsruhe, wo er bis 1919 wirkte. 1899 bis 1900 bekleidete Brauer das Amt des Rektors der Technischen Hochschule Karlsruhe. 1925 verlieh ihm die Technische Hochschule Darmstadt die Würde eines „Doktoringenieurs ehrenhalber". Brauers „Grundriß der Turbinentheorie" (1899) ist trotz des seitherigen Fortschrittes auf diesem Gebiet wegen seiner klaren Analyse der hydraulischen Vorgänge innerhalb der Turbine auch heute noch von hohem Wert. Die 1905 erschienene „Festigkeitslehre" ist, abgesehen von der knappen und klaren Darstellung des Stoffes, vor allem durch die ihr anhängende, geistvolle Aufgabensammlung bemerkenswert, durch die Brauer als einen außerordentlichen Lehrmeister sich ausweist.

Obwohl er nur kurze Zeit in der industriellen Praxis gestanden hatte, blieb doch sein theoretischer Unterricht stets auf die unmittelbare praktische Anwendung ausgerichtet und verlor nicht die Fühlung mit den Bedürfnissen des Tages. Hiermit hing auch die Vorliebe für graphische Berechnungsmethoden zusammen, die er in die Turbinentheorie, die Thermodynamik und die Festigkeitslehre einführte und von denen die Brauersche Integralkurve, seine Konstruktion der Polytrope und des Wärmerisses Gemeingut der schaffenden Ingenieure geworden sind.

Schon der oben gegebene Überblick über die wichtigsten literarischen Arbeiten Brauers und über die ihm zu verdankende Erweiterung der experimentellen und theoretischen Methoden weist auf die große Vielseitigkeit dieses Gelehrten. Der gewaltige Umfang seines Lehrgebietes aber erst — es umfaßte Hydraulik, Turbinentheorie, Festigkeitslehre, Thermodynamik, Kinematik und Aviatik und außerdem noch die Schulung der Maschineningenieure und Elektrotechniker im mechanisch-technischen Laboratorium — gibt das Recht, Brauer als den letzten Enzyklopädisten des Maschinenbaues zu bezeichnen, den das Zeitalter unserer bereits weitgehend spezialisierten Technik um die Jahrhundertwende noch aufzuweisen hatte. Dabei war sein Unterricht in allem bis ins letzte mit größter Sorgfalt vorbereitet und durchdacht. Vortrags- und Übungsstoff waren in weiser Beschränkung auf das Grundlegende und Allgemeingültige so aufgebaut, daß der Hörer zu selbständigem Denken und Arbeiten angeleitet wurde und daß er, wenn ihn die Praxis später vor neue Aufgaben stellte, das Rüstzeug zu ihrer Lösung nicht allein bereit hatte, sondern auch zweckentsprechend und kritisch abwägend einzusetzen wußte.

Schule zu machen — was man so hierunter versteht — war Brauer versagt. Ein wie er universell veranlagter Ingenieur konnte dies in unseren Tagen wohl überhaupt nicht mehr, und es hätte auch seinem stillen und bescheidenen Wesen, das ganz von selbstloser Hingabe an das ihm übertragene Amt getragen war, wenig entsprochen. Gerade durch diese Hingabe aber, die ihn auch um den Geringsten seiner Schüler sich mühen ließ, hat Brauer als Lehrer einen Erfolg gehabt, wie er in gleicher Breite und Tiefe der Auswirkung selten ist.

Nürnberg. Rudolf Mayer. 437

Persönliches.

Am 8. März verstarb in Zürich im Alter von 91 Jahren der em. Prof. der Mathematik Dr. Carl Friedrich Geiser. Er promovierte 1866 in Bern und wirkte von 1870 bis 1913 an der Technischen Hochschule Zürich.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Eine neue Methode zur Integration der linearen, partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung vom hyperbolischen Typus.

Mehrere Zuschriften geben mir Anlaß, darauf hinzuweisen, daß die in Bd. 13, Heft 6 dieser Zeitschrift mitgeteilte Integrationsmethode für die hyperbolische Gleichung 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten auch auf den Fall der inhomogenen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u + d = 0 \quad . \quad (1a)$$

angewendet werden kann. In dem zugeordneten Gleichungssystem (2) ändert sich dann nur die Gl. (II), bei der auf der rechten Seite noch eine Funktion $\delta(x, y)$ additiv hinzutritt, so daß sie die Form hat

$$\frac{\partial t}{\partial y} + a t = \gamma u + \delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (IIa).$$

Die Koeffizientenbestimmung ergibt damit neben den Gl. (4) noch eine weitere Gleichung, nämlich

$$\delta = - d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4a).$$

Die Integration der Gl. (IIa) erfolgt bei beiden Randwertaufgaben in der gleichen Weise wie bisher, nur kommt zu den Funktionen $F_1(x, y)$, Gl. (25), und $F_2(x, y)$, Gl (13), ein als bekannt anzusehender Integralausdruck mit $d(x, y)$ als Faktor beim Integranden hinzu.

München, den 20. Februar 1934.

G. Ackermann. 427

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 24, Kulmstr. 1; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 21. IV. Vj. D.A. 1100.
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.